臺北區公立高中九十八學年度第二學期
指定科目第二次聯合模擬考試

數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

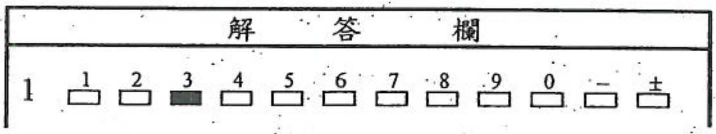
作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位使用黑色墨水的筆(建議使用筆尖較粗約 0.5mm 至 0.7mm 之原子筆)作答，並標明題號。

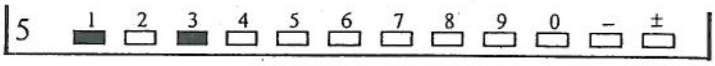
第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

（一）單選題及多選題只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到−，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\boxed{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

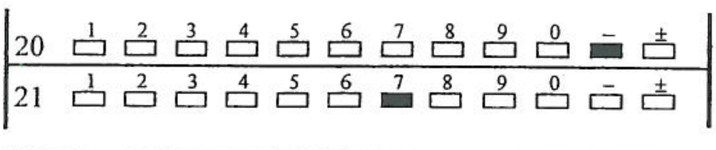


例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 $\boxed{1}$ 與 $\boxed{3}$ 劃記，如：



（二）選填題的題號是 A，B，C，...，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\boxed{-}$ 與第 21 列的 $\boxed{7}$ 劃記，如：



祝考試順利

第壹部分：選擇題(佔 74 分)

一、單選題(18 分)

說明：第 1 至 3 題爲單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1/4 題分，倒扣到本大題之實得分數爲零爲止，未作答者，不給分亦不扣分。

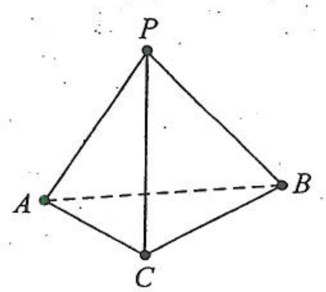
1. 已知兩球面 S_1：$(x-3)^2+y^2+z^2=16$ 與 S_2：$x^2+(y-4)^2+z^2=9$ 相交於一圓，則此圓的面積爲

(1) $\frac{12}{5}\pi$　　(2) $\frac{144}{25}\pi$

(3) 5π　　(4) 25π

(5) 12π

2. 如右圖，四面體 $P\text{-}ABC$ 中，$\overline{AC}=\overline{BC}=2$，$\angle ACB=90°$，$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{AB}$，又 $\overline{PC}\perp\overline{AC}$，平面 APB 與平面 APC 所夾的二面角角度爲 θ，則 $\cos\theta=$？



(1) $\frac{1}{2}$　　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(5) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. 設 $f(x)=|x-2|+|2x-6|$，$k=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$，其中 $a\neq 2,3$，則當 a 爲下列何值時，k 有最小值？

(1) 1
(2) $\frac{5}{2}$
(3) $\frac{7}{2}$
(4) 4
(5) 5

二、多選題(32 分)

說明：第 4 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的，請選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分，每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分，整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數爲零爲止。

4. 若 $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 爲方程式 $z^6=a$ 的一根，則下列何者正確？

(1) $a=1$
(2) $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 亦爲此方程式的根
(3) $-i$ 亦爲此方程式的根
(4) 設此方程式其餘的根爲 z_1、z_2、z_3、z_4、z_5
則 $(2-z_0)(2-z_1)(2-z_2)(2-z_3)(2-z_4)(2-z_5)=65$

5. 設 E_1 與 E_2 兩平面均過原點，且 E_1 平面與向量 $(1,2,3)$ 垂直，E_2 平面含直線 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{6}$，$E_1$ 與 E_2 之交線為 L，此外，尚有空間中一點 $P(1,-4,0)$，則下列何者正確？

(1) E_1 平面為 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=0$

(2) E_2 平面為 $x-2y+z=0$

(3) P 到 L 之最短距離為 $\sqrt{17}$

(4) P 在 L 上的投影點為原點 $(0,0,0)$

6. 甲袋中共有 5 個 1 號球、4 個 2 號球、3 個 3 號球、2 個 4 號球、1 個 5 號球，某人從甲袋中隨機抽取一球，抽出後要放回，共抽 10 次，令 X 表示 10 次試驗中抽到 1 號球的次數，則下列何者為真？

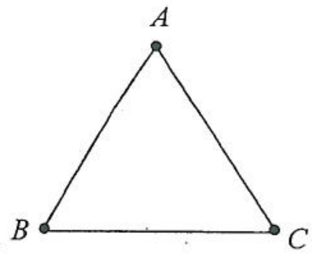
(1) 每次抽到 1 號球的機率為 $\dfrac{1}{3}$

(2) 若 $X=1$ 的機率為 $\dfrac{b}{3^a}$，其中 a、b 為自然數且 $(b,3)=1$，則 $b=512$

(3) X 的平均數 $=\dfrac{7}{2}$

(4) X 的標準差 $=\dfrac{\sqrt{20}}{3}$

7. 如右圖，某地區有 A、B、C 三鎮，某甲在這三個地方移動，每天在其中一鎮，隔天移動到其他鎮。假定某甲順時針方向 $(A \to C，C \to B，B \to A)$ 移動的機率都是 $p(0 < p < 1)$，逆時針方向 $(A \to B，B \to C，C \to A)$ 移動的機率都是 $1 - p$。這天某甲在 A 鎮，則下列敘述何者正確？



(1) 兩天後某甲在 B 鎮的機率爲 p^2
(2) 三天後某甲在 A 鎮的機率爲 $p^3 + (1-p)^3$
(3) 五天後某甲在 A 鎮的機率爲 $p^5 + (1-p)^5$
(4) 不論 $p(0 < p < 1)$ 爲何值，長期而言，某甲在 A、B、C 三鎮的機率皆爲 $\frac{1}{3}$

三、選填題(24 分)

說明：A 至 C 各題爲選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(8～15 內)。 每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設 p、q 爲正實數，若 $\log_9 p = \log_{27} q = \log_{81}(p+q)$，則 $p = \dfrac{⑧ + \sqrt{⑨}}{⑩}$。

B. 一袋中有編號爲 3、4、5、6、7 的球各一個，每次取一球，取後再放回，共取三次，若三次取出的球之編號依次爲 x、y、z，已知 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 的條件下，則三次取出的編號均相同的機率爲 $\dfrac{⑪}{⑫⑬}$ 。

C. 二次函數 $f(x)=px^2+qx+r$ 在 $x=2$ 時函數有最大值，而其圖形在 $x=4$ 處的切線爲 $y=-3x+12$ ，則 $8p+q+r$ 之值爲 ⑭⑮ 。

－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－

第貳部分：非選擇題(佔 26 分)

說明：本大題共有二題計算題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、平面上，過點 $P(3,-3)$ 作曲線 Γ：$y=x^3-6x^2+9x-2$ 的切線，求切線方程式(15 分)

二、平面上三條平行線依序為 L、M、N，已知 L 和 M 的距離為 3，M 和 N 的距離為 1。今在 L、M、N 上各取一點 A、B、C，滿足 $\angle ABC=90°$，求滿足條件的三角形 ABC 面積最小值為何？(11 分)

臺北區公立高中九十八學年度第二學期指定科目第二次聯合模擬考試

數學甲考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	1	234	234	14	124	3	5	2	1	1	3
14	15											
—	3											

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\because$ 兩球心距爲 5，球半徑分別爲 4 及 3

則相交的圓半徑爲此直角三角形的高 $\frac{12}{5}$

故圓的面積爲 $\frac{144\pi}{25}$

【另解】$\because$ 交圓所在平面爲 $3x-4y+7=0$

且 S_1 的球心到該平面的距離 $=\frac{|3\cdot3-4\cdot0+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{16}{5}$

$\therefore$ 交圓的半徑 $=\sqrt{4^2-(\frac{16}{5})^2}=\frac{12}{5}$

故此交圓的面積爲 $\frac{144}{25}\pi$

2. $\because \overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AP}=\overline{BP}$，$\overline{PC}=\overline{PC}$，$\therefore \Delta PAC\cong\Delta PBC$

但 $\angle PCA=90°=\angle PCB$，$\therefore \angle PCB=\angle PCA=90°$

圖形坐標化，設 $A(0,2,0)$、$B(2,0,0)$、$C(0,0,0)$、$P(0,0,t)$

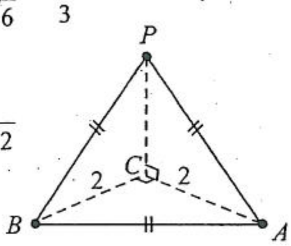
$\because \overline{PB}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\therefore t=2$，即 $P(0,0,2)$，$\therefore \overline{PC}=2$

取 $\overline{AP}$ 的中點 E，連 $\overline{BE}$、$\overline{CE}$，則 $\overline{CE}\perp\overline{AP}$，$\overline{BE}\perp\overline{AP}$

$\because E(0,1,1)$，$\therefore \overrightarrow{EC}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{EB}=(2,-1,-1)$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{EC}|}=\frac{0+1+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

【另解】



(1) ΔABC 中

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PB}=\overline{PA}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$

(2) ΔPCA 中

$\overline{PC}^2=\overline{PA}^2-\overline{AC}^2=4\Rightarrow\overline{PC}=2$

$\because \overline{PC}^2+\overline{BC}^2=\overline{PB}^2$，$\therefore \overline{PC}\perp\overline{BC}$

(3) 以 C 爲原點建立座標系且

$A(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,2)$

則平面 APB：$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1\Rightarrow x+y+z=2$

平面 $APC=yz$ 平面：$x=0$

$\therefore \cos\theta=\left|\frac{(1,1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $\because k=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

又 $f(x)=\begin{cases}-3x+8\text{，當}x<2\\-x+4\text{，當}2\le x<3\\3x-8\text{，當}x\ge3\end{cases}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-3\text{，當}x<2\\-1\text{，當}2<x<3\\3\text{，當}x>3\end{cases}$

$\therefore$ 當 $x<2$ 時，k 有最小值，故選(1)

二、多選題

4. (1) $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 代入方程式，得

$a=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^6=(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^6=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

(2)(3) 方程式爲

$z^6=-1=1\cdot[\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)]$

$\Rightarrow z_k=\sqrt[6]{1}\cdot[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})]$

$k=0,1,2,3,4,5$，當 $k=2$ 時，$z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

當 $k=4$ 時，$z=-i$

(4) 此方程式 $z^6+1=0$ 的六個根爲

z_0、z_1、z_2、z_3、z_4、z_5

則多項式

$z^6+1=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)$

令 $z=2$ 代入

則 $(2-z_0)(2-z_1)(2-z_2)(2-z_3)(2-z_4)(2-z_5)$

$=2^6+1=65$

5. (1) E_1：$1\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0$

$\Rightarrow x+2y+3z=0$

(2) 設 E_2：$ax+by+cz=0$，$\because (1,2,3)$ 在 E_2 上

代入得 $a+2b+3c=0$，又 $(a,b,c)\cdot(4,5,6)=0$

得 $4a+5b+6c=0$

由此可得 $a:b:c=-3:6:-3=1:-2:1$

$\Rightarrow E_2$：$x-2y+z=0$

(3)、(4) 令 L：$\begin{cases}x+2y+3z=0\\x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2t\\y=-\frac{1}{2}t\\z=t\end{cases}$，$t\in R$

$\therefore d(P,L)=\sqrt{(-2t-1)^2+(-\frac{1}{2}t+4)^2+t^2}$

$=\sqrt{\frac{21}{4}t^2+17}\geq\sqrt{17}$，此時 $t=0$，投影點爲原點(0,0,0)

【另解】(4) 檢驗 P 在 L 上的投影點是否爲原點(0,0,0)

即檢驗 $\overrightarrow{OP}$ 是否垂直直線 L

即 $\overrightarrow{OP}$ 是否與直線 L 的方向向量 $(4,1,-2)$ 垂直

$\because (1,-4,0)\cdot(4,1,-2)=0$，

$\therefore P$ 在 L 上的投影點爲原點(0,0,0)

6.(1) 每次抽到 1 號球的機率爲 $\frac{5}{5+4+3+2+1}=\frac{1}{3}$

(2) $X=1$ 的機率 $=C_1^{10}\cdot(\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^9=\frac{10\cdot2^9}{3^{10}}=\frac{5120}{3^{10}}$

$\Rightarrow a=10$、$b=5120$

(3) X 的平均數 $=np=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

(4) X 的標準差 $=\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{20}}{3}$

7.(1) 兩天後由 A 到 B 須兩次順時針方向移動

$\therefore$ 機率爲 p^2

(2) 三天後由 A 到 A 須三次順時針方向或三次逆時針方向移動，$\therefore$ 機率爲 $p^3+(1-p)^3$

(3) 五天後由 A 到 A 須四次順時針一次逆時針方向或一次順時針四次逆時針方向移動，$\therefore$ 機率爲

$5p^4(1-p)+5p(1-p)^4=5p(1-p)[p^3+(1-p)^3]$

(4) 設長期而言，某甲在 A、B、C 三鎭的機率依次爲 $a,b,(1-a-b)$，其中 $0<a$、$b<1$

又轉移矩陣爲 $\begin{bmatrix}0 & p & 1-p\\ 1-p & 0 & p\\ p & 1-p & 0\end{bmatrix}$

則 $\begin{bmatrix}0 & p & 1-p\\ 1-p & 0 & p\\ p & 1-p & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ 1-a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ 1-a-b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}-a+pb+(1-p)(1-a-b)=0\\ (1-p)a-b+p(1-a-b)=0\\ pa+(1-p)b-(1-a-b)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(2-p)a+(1-2p)b=1-p\\ (2p-1)+(1+p)b=p\\ (1+p)a+(2-p)b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 不論 $p(0<p<1)$ 爲何值，長期而言

某甲在 A、B、C 三鎭的機率皆爲 $\frac{1}{3}$

三、選填題

A. 設 $t=\log_9 p=\log_{27} q=\log_{81}(p+q)$

則 $p=9^t$，$q=27^t$，$p+q=81^t$

$\therefore 81^t=9^t+27^t$ 即 $3^{4t}=3^{2t}+3^{3t}$，$\because 3^{2t}\neq0$

$\therefore$ 同除以 $3^{2t}\Rightarrow 3^{2t}-3^t-1=0\Rightarrow 3^t=\frac{1+\sqrt5}{2}$

$\Rightarrow p=9^t=3^{2t}=(3^t)^2=\frac{3+\sqrt5}{2}$

B. $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 可分爲

$x=y\neq z$，$y=z\neq x$，$z=x\neq y$，$x=y=z$ 四種情況：

$P((x-y)(y-z)(z-x)=0)=\frac{5\times1\times4\times3+5\times1\times1}{5^3}=\frac{13}{25}$

$\therefore$ 所求機率 $\frac{\frac{5}{5^3}}{\frac{13}{25}}=\frac{1}{13}$

【另解】 $P((x-y)(y-z)(z-x)=0)$

$=1-P((x-y)(y-z)(z-x)\neq0)=1-\frac{5\times4\times3}{5\times5\times5}=\frac{65}{125}$

又 $P((x-y)(y-z)(z-x)=0 且 x=y=z)$

$=P(x=y=z)=\frac{5}{5^3}$，$\therefore$ 所求機率 $=\frac{\frac{5}{5^3}}{\frac{65}{125}}=\frac{1}{13}$

C. 由題意知點(4,0)在 $y=f(x)$ 圖形上

$\therefore f(4)=0\Rightarrow 16p+4q+r=0$，又 $f'(x)=2px+q$

所以 $f'(4)=-3\Rightarrow 8p+q=-3$，$f'(2)=0\Rightarrow 4p+q=0$

$\therefore p=-\frac{3}{4}$，$q=3$，$r=0$，$\therefore f(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$

$\therefore 8p+q+r=-6+3+0=-3$

第貳部分：非選擇題

一、設切點爲 $Q(a,a^3-6a^2+9a-2)$

$\because y'=3x^2-12x+9$，$\therefore$ 以 Q 爲切點的切線爲

$y-(a^3-6a^2+9a-2)=(3a^2-12a+9)(x-a)$ (3 分)

又點 P 在切線上 $\therefore -3-(a^3-6a^2+9a-2)$

$=(3a^2-12a+9)(3-a)\Rightarrow 2a^3-15a^2+36a-28=0$ (3 分)

$\Rightarrow (2a-7)(a-2)^2$ ... $a=\frac{7}{2}$ 或 2(3 分)

(1) 當 $a=\frac{7}{2}$ 時，切線爲 $y+\frac{9}{8}=\frac{15}{4}(x-\frac{7}{2})$

$\Rightarrow 15x-4y-57=0$ (3 分)

(2) 當 $a=2$ 時

切線爲 $y-0=(-3)(x-2)\Rightarrow 3x+y-6=0$ (3 分)

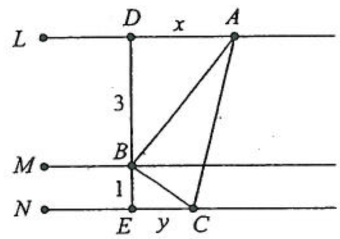
二、假設 D、E 分別是 B 在 L 及 N 上的投影點

那麼 $\overline{BD}=3$，$\overline{BE}=1$

令 $\overline{AD}=x$，$\overline{CE}=y$

由 ΔABD 和 ΔBCE 相似

得 $\frac{x}{3}=\frac{1}{y}\Rightarrow xy=3$



$\therefore \Delta ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+9)(y^2+1)}=\frac{1}{2}\sqrt{9+x^2+9y^2+9}$

$\geq \frac{1}{2}\sqrt{18+6xy}=3$ (由算幾不等式得)

故最小面積爲 3，等號成立在 $x=3$ 、 $y=1$ 時

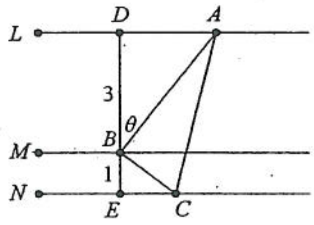
【另解】

假設 $\angle ABD=\theta$

那麼 $\angle BCE=\theta$

$\overline{AB}=\frac{3}{\cos\theta}$

$\overline{BC}=\frac{1}{\sin\theta}$



ΔABC面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}\geq 3$

等號成立在 $\sin 2\theta=1$

即 $\theta=45°$ 時，最小面積爲 3

(本題解法甚多，請各位老師自行斟酌分段給分，謝謝。)