

臺中區國立高級中學九十九學年度
大學入學指定科目考試第一次聯合模擬考
數學乙詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(4)

試題解析：(1) $\log_8 9 = \log_2 3^2 = \frac{2}{3} \log_2 3$

(2) $\log_9 4 = \log_3 2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3 = \log_2 \frac{1}{3}$

(4) $\sqrt{(\log 0.5)^2} = -\log 0.5$ (錯)

(5) $\log_{0.6} 0.3 > \log_{0.6} 0.6 = 1$

2. 參考答案：(3)

試題解析：
$$f(x) = - \begin{vmatrix} 1 & 2-x & (2-x)^2 \\ 1 & 1-x & (1-x)^2 \\ 1 & 4+x & (4+x)^2 \end{vmatrix}$$

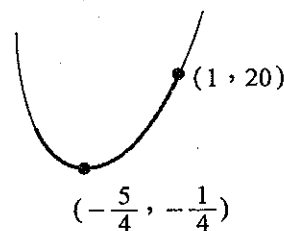
$$= -[(1-x) - (2-x)][(4+x) - (2-x)][(4+x) - (1-x)]$$

$$= 4x^2 + 10x + 6 = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\therefore x = -\frac{5}{4}$ 有 Min $-\frac{1}{4}$

$x = 1$ 有 Max 20

$20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{79}{4}$



二、多選題

3. 參考答案：(3)

試題解析： $f(0) > 0, f(2) < 0$

\therefore 恰有一正實根 α 在 $0 \sim 2$ 之間且當 $x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$

(1) $f(-2i-2) = 0$

(2) $f(3) < 0$

(3) $y = f(x)$ 的圖形恰與 x 軸交於一點

(4) 當 $x^2 = \alpha \Rightarrow f(x^2) = 0$ 有實根 \therefore 選(3)

4. 參考答案：(2)(4)

試題解析：(1) $p_4 = C_4^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ $p_8 = C_2^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \therefore p_4 > p_8$

(2) $p_k = C_k^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, k = 0, 1, 2, \dots, 10$, 由巴斯卡 Δ 在 $k=5$ 即 $p_5 = C_5^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 為最大

$$(3) \sigma^2 = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} < 3$$

$$(4) \mu = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, \sigma = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$5 - \frac{\sqrt{10}}{2} \leq k \leq 5 + \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow 3.42 \leq k \leq 6.58$$

$$\therefore k = 4, 5, 6$$

$$p_4 + p_5 + p_6 = C_4^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_5^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_6^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{21}{32}$$

\therefore 選(2)(4)

5. 參考答案：(2)(3)

試題解析： $\because G: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 必有一組解為 $(0, 0, 0)$ ，現又有一組解為 $(-2, 1, 2)$

\therefore 有無限多組解

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 且表示此相異三平面交於一直線 } \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, t \in R,$$

方向向量為 $(-2, 1, 2)$

$$\text{對方程組 } H: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ 而言, } \Delta_H = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

且 H 有一組解為 $(3, 2, 1)$

$\therefore H$ 有無限多解，表示此相異三平面交於一直線，方向向量亦為 $(-2, 1, 2)$ ，

$$\text{其解為 } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in R,$$

$t=1$ 時得 $(x, y, z) = (1, 3, 3)$ ， $t=-1$ 時得 $(x, y, z) = (5, 1, -1)$

不可能為 $(0, 0, 0)$ ， $(-1, 3, 5)$

\therefore 選(2)(3)

第貳部分：選填題

A. 參考答案：24 (⑥ 2 ⑦ 4)

試題解析：設最快在 n 分鐘內可達成目標

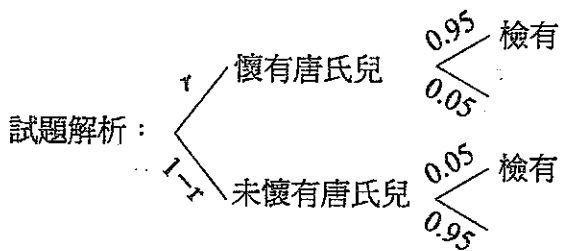
$$\text{則 } 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \geq 10^7$$

$$\Rightarrow \frac{2^n - 1}{2 - 1} \geq 10^7 \Rightarrow 2^n \geq 10^7 + 1 \quad (1 \text{ 可不考慮})$$

$$n \log 2 \geq 7 \Rightarrow n \geq \frac{7}{0.3010} = 23.25 \dots\dots$$

$\therefore n$ 最小 24

B. 參考答案：10 (⑧ 1 ⑨ 0)



$$r \times 0.05 + (1-r) \times 0.95 = 0.86$$

$$0.09 = 0.9r \Rightarrow r = 0.1$$

$$0.1 \times 100 = 10 \text{ (位)}$$

C. 參考答案：2800 (⑩ 2 ⑪ 8 ⑫ 0 ⑬ 0)

試題解析：每組最多 4 人，最少 2 人，可分為 2, 3, 4; 3, 3, 3 及 2, 2, 2, 3 三種

$$\begin{aligned} \therefore \text{共有：} & C_2^9 C_3^7 C_4^4 + \frac{C_3^9 C_3^6 C_3^3}{3!} + \frac{C_2^9 C_2^7 C_2^5 C_3^3}{3!} \\ & = 1260 + 280 + 1260 = 2800 \end{aligned}$$

D. 參考答案： $\frac{1}{3}$ (⑭ 1 ⑮ 3)

$$\text{試題解析：} P(\text{兩球異色}) = \frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^8} + \frac{C_1^3 C_1^1}{C_2^8} + \frac{C_1^3 C_1^1}{C_2^8} = \frac{3}{4}$$

已知兩球顏色相異的情況下，兩球同號機率

$$= P(\text{同為 1 號} | \text{兩球異色}) + P(\text{同為 2 號} | \text{兩球異色}) + P(\text{同為 3 號} | \text{兩球異色})$$

$$= \frac{P(\text{同為 1 號})}{P(\text{兩球異色})} + \frac{P(\text{同為 2 號})}{P(\text{兩球異色})} + \frac{P(\text{同為 3 號})}{P(\text{兩球異色})}$$

$$= \frac{\frac{C_2^3}{C_2^8}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{C_2^3}{C_2^8}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{C_2^2}{C_2^8}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{28}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{28}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{7}{28}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

E. 參考答案：84 (⑯ 8 ⑰ 4)

試題解析：A：“gg”在一起 B：“oo”在一起

$$n(A) = n(B) = \frac{5!}{2!} = 60 \quad n(A \cap B) = 4!$$

$$\therefore \text{同字母不相鄰共有 } \frac{6!}{2! 2!} - (\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} - 4!) = 84$$

第貳部分：非選擇題

一、試題解析：設承租大巴士 x 輛，小巴士 y 輛，此時應滿足

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ 40x + 20y \geq 1000 \\ x + y \leq 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ 2x + y \geq 50 \\ x + y \leq 30 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

在可行解區域內求 $f(x, y) = 6000x + 2000y = 2000(3x + y)$ 的最小值 (2 分)

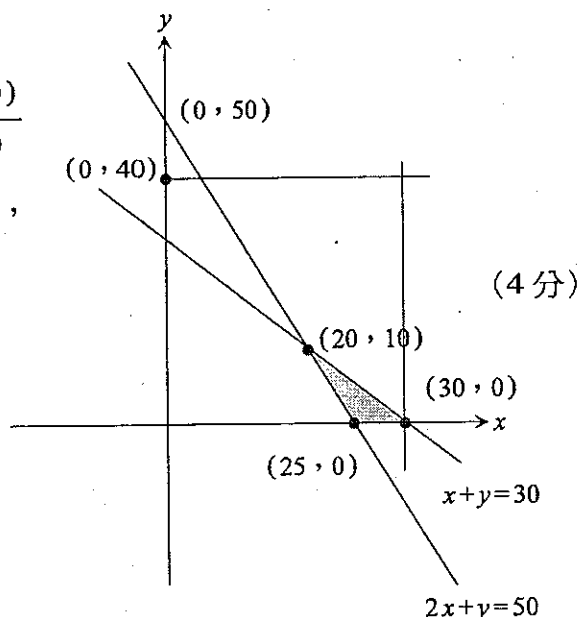
將可行解區域頂點代入 $f(x, y)$ 得

(x, y)	$(25, 0)$	$(30, 0)$	$(20, 10)$
$f(x, y)$	150000	180000	140000

故知租借大巴士 20 輛，小巴士 10 輛，

最節省承租車輛的費用

此時花費 140000 元為最小值 (5 分)



二、試題解析：【方法 1】

$$\text{由 } \frac{a^a b^b}{a^b b^a} = a^{a-b} b^{b-a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \quad (2 \text{ 分})$$

$$1^\circ \text{ 當 } a > b > 0, \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a - b > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1 \quad \therefore a^a b^b > a^b b^a \quad (4 \text{ 分})$$

$$2^\circ \text{ 當 } b > a > 0, 0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a - b < 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1 \quad \therefore a^a b^b > a^b b^a \quad (4 \text{ 分})$$

【方法 2】

$$\log a^a b^b = a \log a + b \log b \quad \dots\dots (1) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\log a^b b^a = b \log a + a \log b \quad \dots\dots (2) \quad (1 \text{ 分})$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \log a^a b^b - \log a^b b^a = (a - b) \log a + (b - a) \log b \quad (2 \text{ 分})$$

$$= (a - b)(\log a - \log b) > 0 \quad (\because a - b \text{ 與 } \log a - \log b \text{ 同號}) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \log a^a b^b > \log a^b b^a$$

$$\therefore a^a b^b > a^b b^a \quad (2 \text{ 分})$$