

全國公立高級中學

九十九學年度指定科目第五次聯合模擬考試

考試日期：100年3月1~2日

數學乙

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：第壹部分請用2B鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液(帶)。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液(帶)。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

- (一) 單選題只用1, 2, 3, 4, 5等五個格子，而不需要用到-, ±以及6, 7, 8, 9, 0等格子；多選題只用1, 2, 3, 4, 5等五個格子，而不需要用到-, ±以及6, 7, 8, 9, 0等格子。

例：若第1題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第1列 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是7），如：

解 答 欄												
1	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\blacksquare}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

例：若第5題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第5列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

5	$\overset{1}{\blacksquare}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\blacksquare}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$
---	-----------------------------	------------------------	-----------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	--------------------------

- (二) 選填題的題號是A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第C題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第20列的 \square 與第21列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

20	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\blacksquare}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$
21	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\blacksquare}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

祝考試順利

二、多選題 (28 分)

說明：第 3 至 6 題為多選題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 7 分，各選項獨立計分，只答錯一個選項，得該題 3/5 題分；錯兩個選項，得該題 1/5 題分。整題未作答者或答錯多於兩個選項者，該題以零分計算。

3. 已知 a 、 b 、 c 、 d 均為大於 1 的正整數，則下列哪些等式恆成立？

(1) $\log_a b^2 = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$

(2) $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$

(3) $a^{\log_b c} \cdot a^{\log_b d} = a^{\log_b(cd)}$

(4) $\frac{\log a^c}{\log b^c} = \log \frac{a}{b}$

(5) $a^c \cdot b^d = (ab)^{c+d}$

4. 「 $-2 \leq x \leq -1$ 或 $2 \leq x \leq 3$ 」為下列哪些不等式之解？

(1) $(x+1)(x+2)(x-2)(x-3) < 0$

(2) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$

(3) $(x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 3) \leq 0$

(4) $x^2 - x + 4 \leq |4x - 2|$

(5) 聯立 $\begin{cases} (x^2 + x - 2)(x^2 - 4x + 3) \leq 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$

5. 阿信一家人假日到某遊樂園遊玩，此遊樂園為一半徑 5 公里之圓形，入口 A 點與出口 B 點恰好為一直徑之兩端點，若此遊樂園之景點皆在圓周上，阿信一家人因時間不夠之關係，僅能參觀一景點。若他們一開始以每小時 4 公里的速度由 A 點沿直線方向往某一景點 C 前進，後來因疲倦行進速度較慢，以每小時 3 公里的速度由 C 點沿直線方向往 B 點前進，那麼他們在遊樂園所花的時間可能為幾小時？

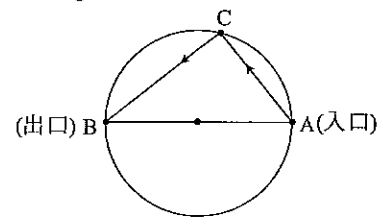
(1) $\frac{31}{6}$

(2) $\frac{79}{12}$

(3) $\frac{41}{6}$

(4) $\frac{25}{6}$

(5) $\frac{49}{12}$



6. 若一個學生學習一種英文單字記憶法，經過 t 星期之學習後，共可記憶 $L(t)$ 個英文單字。以數學模式 $L(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 表示，其中 a, b 為常數。已知該生在一星期的學習後，共可記憶 64 個單字；二星期的學習後，共可記憶 112 個單字，則以下何者為真？

(1) $a = 256$

(2) b 約為 -0.1249

(3) 該生在三星期的學習後，共可記憶 148 個單字

(4) 該生每星期所增加單字的數量會比前一星期多

(5) 該生使用這種英文單字記憶法後，預估一年後可記憶超過 500 個英文單字

三、選填題 (32分)

說明：A 至 D 題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(7~15)內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 電視節目中某闖關遊戲，進行的其中一關為投擲一硬幣關卡。闖關者若丟出反面則再丟一次，直到丟出正面才可過關。節目特別規定如果連丟五次反面則自動過關。假設此硬幣為公正硬幣，則過關要丟硬幣的次數期望值為 $\frac{7 \oplus 8}{16}$ 次。
- B. 某民調公司針對台東縣立法委員選舉調查甲候選人的支持率，第一次民調結果在 95% 的信心水準之下，信賴區間為 $[0.784, 0.816]$ 。民調公司在相同的人數之下，進行第二次民調，得到支持率 \hat{p} 為 0.5，則第二次民調結果在 95% 的信心水準的信賴區間為 $[0. \underline{9} \oplus \underline{10}, 0. \underline{11} \oplus \underline{12}]$ 。
- C. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ 。計算 $0.6^{0.6}$ 的數值化為小數，其小數點後第一位數字為 $\underline{13}$ 。
- D. 若 $2x-3$ 為整係數方程式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + (a+1)$ 之因式，且 $1 \leq a \leq 500$ ，則此種 a 最多有 $\underline{14} \oplus \underline{15}$ 個。

—— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 —— — — — —

第貳部分：非選擇題(28 分)

說明：本大題共有二題計算題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號(1、2、…)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、已知甲乙丙丁戊 5 人在深夜來到火車站，此時沒有其他乘客。

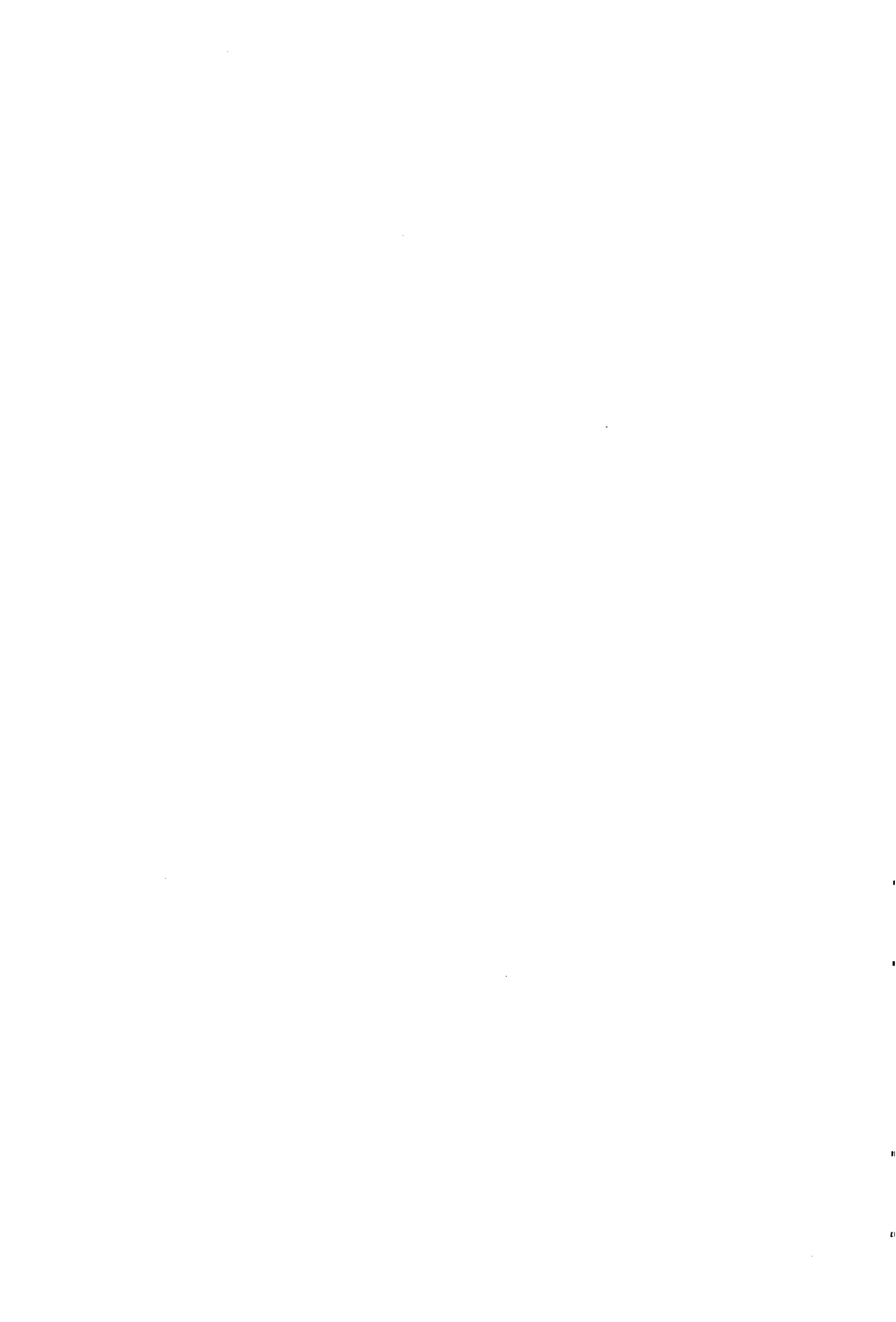
1. 有 A 、 B 、 C 三個剪票口，此 5 人各自買完車票後，在剪票口前排隊。在剪票員的眼中，他只在乎剪票口 A 排了幾個人、 B 排了幾個人、 C 排了幾個人，他不在乎誰排在哪裡，排第幾個(因為他不認識這五人)。例如：
 A 剪票口排了 2 個人， B 剪票口排了 3 個人， C 剪票口沒有人排隊，這是一種情形。
 A 剪票口排了 2 個人， B 剪票口排了 2 個人， C 剪票口排了 1 個人，這是另一種情形。
請問剪票員可能看到的情形總共有幾種？(4 分)
2. 剪完票後，5 人上了只有 3 節車廂的電聯車。只考慮第一車廂坐了哪些人，第二車廂坐了哪些人，第三車廂坐了哪些人。總共會有幾種可能？(4 分)
(例如第一車廂坐了甲、丁、戊，第二車廂沒坐人，第三車廂坐了乙、丙，這是一種可能。第一車廂坐了甲、丁、戊，第二車廂坐了乙、丙，第三車廂沒坐人，這是另一種可能)
3. 鐵路局舉辦「深夜乘車平安大摸彩」，抽獎結果：坐第一車廂的每位乘客發 20 元抵用券，坐第二車廂的每位乘客發 30 元抵用券，坐第三車廂的每位乘客發 10 元抵用券。已知此 5 人共得到 100 元抵用券。考慮每個人拿到抵用券面額之異同，總共會有多少種可能？(6 分)

二、某校參加樺樺公司所舉辦之模擬考，根據該校某班歷次考試在該年級排名之變化機率，統計如下表所示：

本次 下一次	進步	不變	退步
進步	0.5	0.4	0.3
不變	0.3	0.3	0.3
退步	0.2	0.3	0.4

已知該班第二次排名進步

1. 試求第四次排名仍然進步之機率為何？(4分)
2. 若該校之家長會為鼓勵學生，訂出第四次模擬考試之獎勵辦法。如果第四次模擬考名次進步，則發給該班 4000 元之獎勵金，若名次退步，則該班需捐出 2000 元當做愛心基金，則該班獎勵金之期望值為何？(10分)



數學乙考科解析

考試日期：100年3月1~2日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	5	123	345	45	13	3	1	4	8	5	2	7	8	4

第壹部份：選擇題

一、單選題

1. 設 $z=1+i$ ， $f(z)=z^3+az^2+bz+c=2$ ，

$f(-z)=-z^3+az^2-bz+c=2-8i$ ，

兩式相減得 $2z^3+2bz=8i$ ，得 $b=2$ 。

$f(1+i)=(1+i)^3+a(1+i)^2+2(1+i)+c=2$ ，

$(c-2)+(2a+4)i=0$ ，故 $c=2$ 且 $a=-2$

$f(1)=1-2+2+2=3$

2. $(1+2x)^n$ 的展開式中， x^2 項的係數為 a_n ，則

$a_n=4C_2^n=4 \cdot \frac{n(n-1)}{2}=2n(n-1)$

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n(n-1)}$

$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\dots+\frac{1}{a_{100}}=\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$=\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right) \right]$

$=\frac{1}{2} \left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{99}{200}$

二、多選題

3. 由 $\log_a b^r = \frac{r}{r} \log_a b$ (a, b 均為正實數， $a \neq 1, r \neq 0$)

(1) $\log_{a^2} b^2 = \frac{2}{2} \log_a b = \log_a b$ ，

$\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_{a^{-1}} b^{-1} = \frac{-1}{-1} \log_a b = \log_a b$ ，(1) 正確

(2) $\log_a b \cdot \log_c d = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log d}{\log c} = \frac{\log d}{\log a} \cdot \frac{\log b}{\log c} = \log_a d \cdot \log_c b$ ，

(2) 正確

(3) $a^{\log_b c} \cdot a^{\log_b d} = a^{\log_b c + \log_b d} = a^{\log_b (cd)}$ ，(3) 正確

(4) 不一定成立。例： $a=100, b=10, c=2$ 代入即不成立。

(5) 不一定成立。例： $a=b=c=d=2$ 代入即不成立。

4. (1) 本選項無等號，原題目有等號

(2) 本選項 $x \neq -1$ 且 $x \neq -2$ ，與原題意不同

(3) 其中 (x^2+4) 與 (x^2+2x+3) 恆正，故繼續解

$(x^2-4)(x^2-2x-3) \leq 0$

$(x+2)(x-2)(x+1)(x-3) \leq 0$ ，答案同原題目

(4) 當 $x \geq \frac{1}{2}$ 時， $x^2-x+4 \leq 4x-2$ ， $x^2-5x+6 \leq 0$ ，得 $2 \leq x \leq 3$

當 $x < \frac{1}{2}$ 時， $x^2-x+4 \leq -4x+2$ ， $x^2+3x+2 \leq 0$ ，

得 $-2 \leq x \leq -1$

綜合二者（注意要考慮 $x \geq \frac{1}{2}$ 或 $x < \frac{1}{2}$ ），答案同原題目

(5) 解 $(x^2+x-2)(x^2-4x+3) \leq 0$ ， $(x-1)(x+2)(x-1)(x-3) \leq 0$ ，

$(x-1)^2(x+2)(x-3) \leq 0$ 得 $-2 \leq x \leq 3 \dots \textcircled{1}$

解 $x^2-x-2 \geq 0$ ， $(x+1)(x-2) \geq 0$ ，得 $x \leq -1$ or $x \geq 2 \dots \textcircled{2}$

聯立 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 答案同原題目

5. 設 $AC=x, CB=y$

$x^2+y^2=100$

求 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3}$

$(x^2+y^2) \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \geq \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2$

$100 \times \frac{25}{144} \geq \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \leq \frac{25}{6}$

又 $x=10, y=0$ 代入 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \geq \frac{5}{2}$

$x=0, y=10$ 代入 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \geq \frac{10}{3}$

$\therefore \frac{5}{2} \leq \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \leq \frac{25}{6}$

6. (1) $64=a(1-10^{-b}) \dots \textcircled{1}$

$112=a(1-10^{-2b}) \dots \textcircled{2}$

兩式相除 $\frac{64}{112} = \frac{a(1-10^{-b})}{a(1-10^{-b})(1+10^{-b})}$

$\frac{4}{7} = \frac{1}{1+10^{-b}}$

$\therefore 10^{-b} = \frac{3}{4}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $a=256$

(2) $\therefore 10^{-b} = \frac{3}{4}$

$\therefore -b = \log \frac{3}{4}$

$-b = \log 3 - 2 \log 2$

$-b = 0.4771 - 2 \times 0.3010$

$b = 0.1249$

(3) $L(3) = 256 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \right] = 148$

(4) $L(2) - L(1) = 112 - 64 = 48$

$L(3) - L(2) = 148 - 112 = 36$

$36 < 48$

增加的單字數量愈來愈少

(5) $\therefore L(t) = 256 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^t \right]$

\therefore 最多可記憶 256 個單字

三、選填題

A. $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot 5 + \frac{1}{32} \cdot 5 = \frac{31}{16}$

B. 在 95% 之信心水準之下，

信賴區間為 $[\hat{p} - 2s, \hat{p} + 2s]$ (註)， $s = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 。

第一次民調之信賴區間為 $[0.784, 0.816]$ ，

可得 $\hat{p} = 0.8$, $s = 0.008$ 。

$$0.008 = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}}, n = 2500. \text{ 第二次民調得 } \hat{p} = 0.5,$$

$$s = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{2500}} = 0.01, \text{ 故 } 95\% \text{ 的信賴區間為 } [0.48, 0.52].$$

註：若 95% 之信心水準之下，信賴區間以 $[\hat{p} - 1.96s, \hat{p} + 1.96s]$ 來計算，仍會得到相同答案。

C. $\log 0.6^{0.6} = 0.6 \cdot \log \frac{6}{10} = 0.6(\log 2 + \log 3 - \log 10)$

$$\approx 0.6(0.3010 + 0.4771 - 1) = -0.13314 = -1 + 0.86686$$

已知 $\log 7 < 0.86686 < \log 8$,

$$-1 + \log 7 < -1 + 0.86686 < -1 + \log 8, \log 0.7 < \log 0.6^{0.6} < \log 0.8$$

故 $0.6^{0.6}$ 的小數點後第一位數字為 7

D. $\because 2|a \text{ 且 } 3|(a+1)$

$$\therefore a = 2, 8, 14, 20, \dots$$

$$\therefore a = 2 + 6(n-1) = 6n - 4, \text{ 其中 } n \text{ 為正整數}$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 500$$

$$\therefore 1 \leq 6n - 4 \leq 500$$

$$1 \leq n \leq 84$$

n 有 84 個

第貳部分：非選擇題

一. 1. 5 人排三個剪票口： $H_5^3 = 21$ 種(4 分)

2. 由人來選車廂，每個人都有三種選擇，故共有 $3^5 = 243$ 種結果(4 分)

3. 設第一車廂坐 x 人，第二廂坐 y 人，第三廂坐 z 人，

$$\text{可知 } x + y + z = 5 \text{ (1 分)}$$

$$\text{及 } 20x + 30y + 10z = 100 \text{ (1 分)}$$

$$\text{找 } \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 10 \end{cases} \text{ 的非負整數解，共 51 種(4 分)}$$

y	x	z	人的排列數
0	5	0	$C_5^5 = 1$
1	3	1	$C_1^5 C_3^4 C_1^1 = 20$
2	1	2	$C_2^5 C_1^3 C_2^2 = 30$
3	-1	3	不合實際

二. 1. 第四次進步-第三次進步第四次進步+第三次不變第四次進步+第三次退步第四次進步

$$= 0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.4 + 0.2 \times 0.3 = 0.43 \text{ (4 分)}$$

2. 第四次進步=0.43

第四次退步=第三次進步第四次退步+第三次不變第四次退步+第三次退步第四次退步

$$0.5 \times 0.2 + 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.4 = 0.27 \text{ (4 分)}$$

$$\text{期望值} = 4000 \times 0.43 - 2000 \times 0.27 = 1180 \text{ (6 分)}$$