全國公私立高級中學

九十九學年度指定科目第五次聯合模擬考試

考試日期：100 年 3 月 1~2 日

數學甲

—作答注意事項—

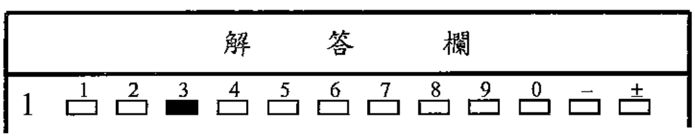
考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液(帶)。
第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

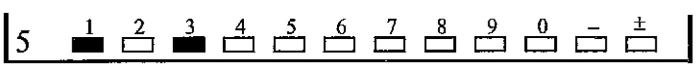
第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

（一）單選題只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到−，±以及 6，7，8，9，0 等格子；多選題只用 1，2，3，4 等四個格子，而不需要用到−，±以及 5，6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 3 劃記（注意不是 7），如：

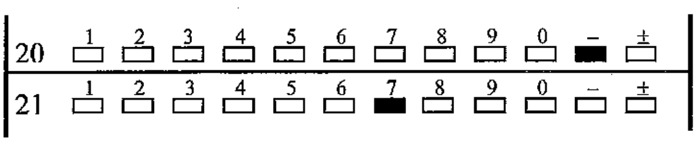


例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 1 與 3 劃記，如：



（二）選填題的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{20\ 21}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 劃記，如：



祝考試順利

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 74 分)

一、單選題(18 分)

說明：第 1 至 3 題爲單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，整題未作答或答錯者，以零分計算。

1. 已知函數 $y=\sin 2x$，其中 x 爲任意實數；又函數 $y=\left|\log_2 x-\sqrt{2}\right|$，其中 $x>0$，則兩函數圖形在坐標平面上有多少個交點？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個
(4) 4 個　(5) 5 個

2. 空間中有一球心 O 之球面 S，被一平面 E 截出一圓 C，其中圓 C 之圓心 K 異於球心 O。弦 $\overline{PQ}$ 爲圓 C 上之直徑且 $\overline{PQ}=3$，則 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 之值爲

(1) 9　(2) -9　(3) 6
(4) $-\dfrac{3}{2}$　(5) $\dfrac{9}{2}$

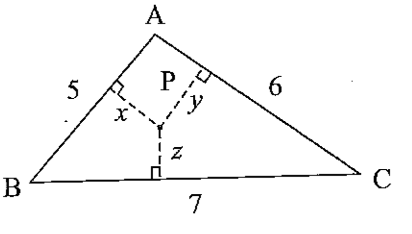
3. T公司應徵職員，通過初選進入複選的人員共計有男生 3 人女生 4 人，經理秘書需安排 1 人進入經理辦公室進行面試，其餘尚未面試之人員需在休息室靜候。面試完之人員逕行離開。若要求休息室內女生人數總是多於男生人數，則經理秘書有多少種安排人員面試的排列名單？

(1) 144 種　(2) 432 種　(3) 576 種
(4) 720 種　(5) 1024 種

二、多選題 (32 分)

說明：第 4 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，只答錯一個選項，得該題 1/2 題分。整題未作答者或答錯兩個選項者，該題以零分計算。

4. 如圖所示，ΔABC的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{AC}=6$、$\overline{BC}=7$。點 P 為 ΔABC內部一點，且到三邊之最短距離分別為 x、y、z，則



(1) ΔABC面積為 $6\sqrt{6}$
(2) $5x+6y+7z=6\sqrt{6}$
(3) $x^2+y^2+z^2$的最小值為 $\dfrac{108}{55}$
(4) xyz 的最大值為 $\dfrac{64\sqrt{6}}{35}$

5. 已知 $\begin{cases}\sin\theta+\sin\delta=0\\ \cos\theta+\cos\delta=1\end{cases}$，其中 θ、δ 為實數，則

(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$、$\cos\delta=\dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\delta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos 2\theta+\cos 2\delta=-1$

(4) $\sin 3\theta+\sin 3\delta=1$

6. 函數 $y=f(x)=\dfrac{11^x}{11^x+1}$，$x$ 為任意實數，則

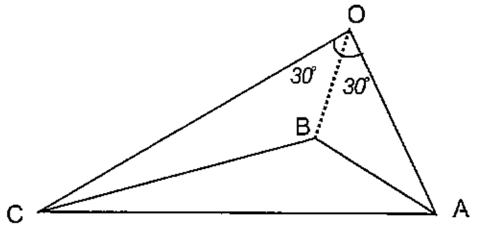
(1) $f(-x)=\dfrac{1}{11^x+1}$

(2) $f(x)+f(-x)=1$

(3) $\displaystyle\sum_{k=-10}^{10} f(x)=10$

(4) $f(x)\cdot f(-x)$ 之最大值為 $\dfrac{1}{4}$

7. 如圖所示，設 O、A、B、C為平面上的四點，$\angle AOC=60^\circ$，B點在$\angle AOC$的內角平分線上，已知 $\overline{OA}=4$，$\overline{OB}=2$，$\overline{OC}=6$。若平面上一點 P 滿足 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，其中 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$，$\gamma\geq 0$，$\alpha+\beta+\gamma=1$，則下列選項何者正確？



(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$
(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$爲有理數
(3) 動點P的軌跡落在$\triangle ABC$的區域內
(4) 動點P所成之集合面積爲 $6\sqrt{3}-5$

三、選填題 (24 分)

說明：A 至 C 各題爲選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(8～17 內)。
每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 對矩陣$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 5 \\ 2 & b & c & 0 \\ a & 3 & c & -1 \end{bmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，則 $a^2+b^2+c^2=$ ⑧⑨。

B. 若 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，且 $\begin{cases} \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=-3 \\ \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=3 \\ \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=-1 \end{cases}$，則 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{⑩}{⑪}\pi$。

C. 今有某大樓之某電梯自一樓到六樓間升降，且每次每層樓均開門停留。現在5人自一樓搭乘此電梯，在各層樓均無其他人再進入搭乘此電梯的假設下，則至少有一個樓層均無人離開電梯之機率爲 $\dfrac{⑫⑬⑭}{⑮⑯⑰}$。

——————— 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 ———————

第貳部分：非選擇題(26分)

說明：本大題共有二題計算題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號(1.、2.)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、丁丁每天都開車上班，依照習慣一星期五天之中有兩天會開車行經國王路，有兩天會行經王子路，有一天會行經公主路。由於這三條路互相平行，所以丁丁每天只會選擇其中一條路到公司。依照官方統計，國王路每七天有兩天會塞車，王子路每七天有三天會塞車，而公主路每七天有一天會塞車。某日上班時間老闆有要事要找丁丁卻不見其人，已知丁丁確實已經出門卻遇上塞車，請問丁丁塞車在國王路的機率。(8分)

二、給定方程式 $x^6=-8$，則

1. 將方程式所得之根 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6 描繪在複數平面上，並依逆時針方向連接（順時針方向亦可），則所得之凸多邊形面積爲何。(9 分)

2. 承 1.，若複數平面上有一點 $P(\frac{\sqrt{6}}{2},0)$，則 $\sum_{k=1}^{6}\left|z_k-P\right|$ 之值爲何。(9 分)

全國公私立高級中學九十九學年度指定科目第五次聯合模擬考試

數學甲考科解析

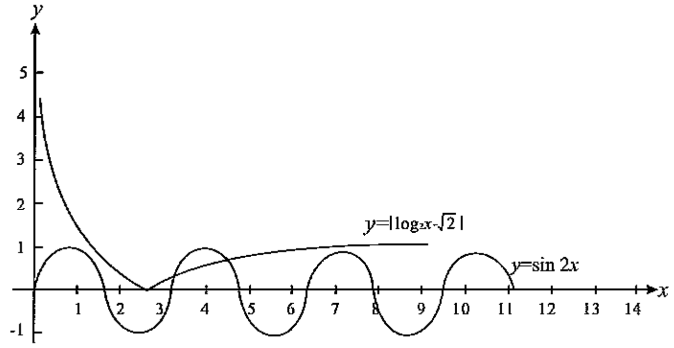
考試日期：100 年 3 月 1~2 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	5	4	14	13	124	34	3	5	9	4	6	0	1	6
16	17													
2	5													

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.



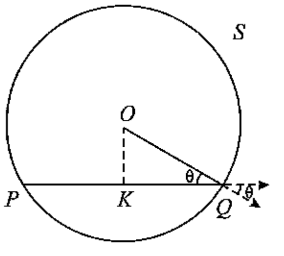
2. $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$

$=(|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta)|\overrightarrow{PQ}|$

$=\overline{KQ}\cdot\overline{PQ}$

$=\dfrac{3}{2}\cdot 3$

$=\dfrac{9}{2}$



3. 在坐標平面上，以 x 代表男生人數，以 y 代表女生人數，則此題相當於從(3,4)走格子點至(0,0)且保持 $x<y$ 則共有 5 種走法，又女生有 4 人且男生有 3 人，故總共有 $5\times 3!\times 4!=720$ 種排列名單

二、多選題

4. (1) $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=\dfrac{1}{2}(5+6+7)=9$

ΔABC 面積爲 $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=6\sqrt{6}$

(2) ΔABC 面積 $=\Delta ABP$ 面積+ ΔACP 面積 $+\Delta BCP$ 面積

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times 5\times x+\dfrac{1}{2}\times 6\times y+\dfrac{1}{2}\times 7\times z=6\sqrt{6}$

$\Rightarrow 5x+6y+7z=12\sqrt{6}$

(3)由柯西不等式

$[(5)^2+(6)^2+(7)^2][(x)^2+(y)^2+(z)^2]\ge[(5)(x)+(6)(y)+(7)(z)]^2$

$\Rightarrow 110(x^2+y^2+z^2)\ge 864$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{864}{110}=\dfrac{432}{55}$

(4)由算幾不等式

$\dfrac{5x+6y+7z}{3}\ge\sqrt[3]{(5x)(6y)(7z)}\Rightarrow\dfrac{12\sqrt{6}}{3}\ge\sqrt[3]{210xyz}$

$\Rightarrow xyz\le\dfrac{64\sqrt{6}}{35}$

5. 由 $\begin{cases}\sin\theta+\sin\delta=0\\ \cos\theta+\cos\delta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=-\sin\delta\\ \cos\theta=1-\cos\delta\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\theta=\sin^2\delta\cdots\cdots(*)\\ \cos^2\theta=1-2\cos\delta+\cos^2\delta\cdots\cdots(**)\end{cases}$

(1)(*)+(**)：$1=1-2\cos\delta+1\Rightarrow\cos\delta=\dfrac{1}{2},\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(2)利用三角函數平方關係，得 $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin\delta=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos 2\theta+\cos 2\delta=(2\cos^2\theta-1)+(2\cos^2\delta-1)=-1$

(4) $\sin 3\theta+\sin 3\delta=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)+(3\sin\delta-4\sin^3\delta)$

$=3(\sin\theta+\sin\delta)-4(\sin\theta+\sin\delta)(\sin^2\theta-\sin\theta\sin\delta+\sin^2\delta)=0$

6. 由 $y=f(x)=\dfrac{11^x}{11^x+1}$，

(1) $f(-x)=\dfrac{11^{-x}}{11^{-x}+1}=\dfrac{11^{-x}}{11^{-x}+1}\times\dfrac{11^x}{11^x}=\dfrac{1}{1+11^x}$

(2) $f(x)+f(-x)=\dfrac{11^x}{11^x+1}+\dfrac{1}{11^x+1}=1$

(3) $\displaystyle\sum_{k=-10}^{10}f(x)=f(-10)+f(-9)+f(-8)+\cdots+f(10)$

$=[f(10)+f(-10)]+[f(9)+f(-9)]+\cdots+[f(1)+f(-1)]+f(0)=\dfrac{21}{2}$

(4)令 $u=f(x)=\dfrac{11^x}{11^x+1}>0$，$v=f(-x)=\dfrac{1}{11^x+1}>0$ 且 $u+v=1$，

則 $uv=u(1-u)=-u^2+u=-(u-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$

7. 令 $O(0,0),B(0,-2)$，則利用複數乘法作旋轉，

$A=2(0-2i)\cdot(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=(2-i2\sqrt{3})$，即 $A=(2,-2\sqrt{3})$；

同理，$C=3(0-2i)\cdot(\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ)=(-3-i3\sqrt{3})$，

即 $C=(-3,-3\sqrt{3})$。

(1)(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(2,-2\sqrt{3}+2)\cdot(-3,-3\sqrt{3}+2)=16-10\sqrt{3}<0$

(3)(4)因爲 $\gamma=1-(\alpha+\beta)$，

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$，

且 $\alpha+\beta\le 1$，故 P 點軌跡落在 ΔABC 的區域內。所以動點 P 所成之集合面積爲 ΔABC 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & -2\sqrt{3}+2\\ -3 & -3\sqrt{3}+2\end{matrix}\right\|=6\sqrt{3}-5$

三、選填題

A. 將矩陣 $\begin{bmatrix}a & b & 1 & 5\\ 2 & b & c & 0\\ a & 3 & c & -1\end{bmatrix}$ 視爲 (x,y,z) 三元一次聯立方程組之增廣矩陣，則矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 即爲 $\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$，代回原聯立方

程組得$\begin{cases}a+b+1=5\\2+b+c=0\\a+3+c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=-5\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=35$

B. 考慮三次多項方程式有三個根 $\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 、 $\tan\gamma$ ，

則 $(x-\tan\alpha)(x-\tan\beta)(x-\tan\gamma)=0$ ，

又$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=-3\\\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=3\\\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=-1\end{cases}$ ，

所以此三次多項方程式爲

$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3=0\Rightarrow x=-1$ (重根)，

故 $\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma=-1$ 且 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ ，

$\alpha=\beta=\gamma=\frac{3}{4}\pi\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{4}\pi$

C. $P=1-P$(二樓、三樓、四樓、五樓、六樓均一人離開)

$=1-\frac{P_5^5}{5^5}=1-\frac{24}{625}=\frac{601}{625}$

第貳部分：非選擇題

一. 令 A 表示丁丁在開車行經國王路之事件，

B 表示丁丁在開車行經王子路之事件，

C 表示丁丁在開車行經公主路之事件，

T 表示丁丁遇上塞車之事件，

依題意，丁丁開車行經三條路的機率分別爲

$P(A)=\frac{2}{5}$ 、 $P(B)=\frac{2}{5}$ 、 $P(C)=\frac{1}{5}$ ，(3 分)

又塞車的機率分別爲

$P(T|A)=\frac{2}{7}$ 、 $P(T|B)=\frac{3}{7}$ 、 $P(T|C)=\frac{1}{7}$ ，(3 分)

則依貝氏定理知

$$P(A|T)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}}{\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}=\frac{4}{11}\text{ (2 分)}$$

二. 1. 方程式 $x^6=-8=8(-1+0\cdot i)=8(\cos\pi+i\sin\pi),i=\sqrt{-1}$

之所有根爲

$z_k=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}),\ k=1,2,3,4,5,6$ ，(3 分)

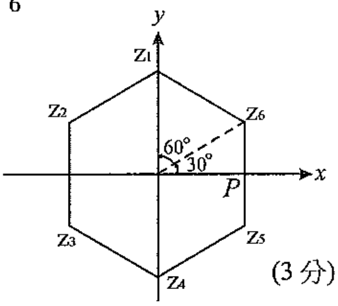
其圖形爲正六邊形，

可分割成 6 個以 $\sqrt{2}$

爲邊長之正三角形，

故面積爲

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{2}^2=3\sqrt{3}$ (3 分)



2. $\sum_{k=1}^{6}|z_k-P|$ (3 分)

$=|z_1-P|+|z_2-P|+|z_3-P|+|z_4-P|+|z_5-P|+|z_6-P|$

$=2\left[|z_6-P|+|z_1-P|+|z_2-P|\right]$(對稱)

又 $z_6=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi+12\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi+12\pi}{6})\right]=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

表示 $(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$z_1=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi+2\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi+2\pi}{6})\right]=0+\sqrt{2}i$ 表示 $(0,\sqrt{2})$ ，

$z_2=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi+4\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi+4\pi}{6})\right]=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (3 分)

表示 $(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ ，是以 $|z_6-P|=\overline{Pz_6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$|z_1-P|=\overline{Pz_1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ ， $|z_2-P|=\overline{Pz_2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ ，(3 分)

所以 $\sum_{k=1}^{6}|z_k-P|=\sqrt{2}+\sqrt{14}+\sqrt{26}$ (3 分)