2011 指定科目模擬考試卷

數學甲考科

數甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一)選擇題：只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 −，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單一選擇題，選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的$\overset{3}{\square}$劃記（注意不是 7），如：

選擇題解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若第 7 題為多重選擇題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 7 列的$\overset{1}{\square}$與$\overset{3}{\square}$劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
7	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

(二)選填題的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的$\overset{-}{\square}$與第 21 列的$\overset{7}{\square}$劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題（占80分）

一、單選題（占24分）

說明：第1至4題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得6分，答錯不倒扣。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 已知$\log\frac{5}{7}=a$，$\log 175=b$，試以a、b表示$\log 7$。

(1)$\frac{b-2a}{3}$　(2)$\frac{2b-a}{3}$　(3)$\frac{3b-a}{3}$　(4)$\frac{b-3a}{3}$　(5)$\frac{3b-2a}{3}$

2. 存在物體內的放射性碳C_{14}會不斷的衰變，已知C_{14}的半衰期是5570年。考古學家在2010年時發現一個古代陶器，其碳C_{14}的殘餘量為90％，試求這個陶器是何時代的產物？

（已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$）

(1)春秋戰國年代以前（約西元前200年以前）

(2)秦漢年代（約西元前200年至西元後200年間）

(3)三國、晉年代（約西元後200年至西元後400年間）

(4)南北朝、隋、唐年代（約西元後400年至西元後900年間）

(5)五代十國、宋年代（約西元後900年至西元後1300年間）

3. 小精向銀行青年貸款創業，第一年年初貸得 100 萬元，每年獲利是該年年初投入資金的20％，但每年年底需繳交該年獲利的20％作為所得稅，至於餘額則全部投入當作下一年的經營成本；而銀行青年貸款利率為5％，十年後小精連本帶利將貸款償還，試問償還那一年小精的總獲利最接近下列何值？

(1) 130　(2) 180　(3) 230　(4) 280　(5) 330　萬元

$y=x^{10}$

x^{10}	y	x^{10}	y	x^{10}	y	x^{10}	y
1.05^{10}	1.62	1.09^{10}	2.37	1.13^{10}	3.39	1.17^{10}	4.81
1.06^{10}	1.79	1.10^{10}	2.59	1.14^{10}	3.71	1.18^{10}	5.23
1.07^{10}	1.97	1.11^{10}	2.84	1.15^{10}	4.06	1.19^{10}	5.69
1.08^{10}	2.16	1.12^{10}	3.11	1.16^{10}	4.41	1.20^{10}	6.19

4. 設$A=\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，若$A^8$的反矩陣不存在，則實數$x$等於多少？

(1) 1　(2) 2　(3) -1　(4) -2　(5) 3

二、多選題（占24分）

說明：第5至7題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。五個選項全部答對者得8分，只錯一個選項可得4.8分，錯兩個選項可得1.6分，未作答或錯三個以上選項不給分。

5. 空間中，直線 $L:\begin{cases}x=4+5t\\ y=-3-2t\text{，}t\in R\\ z=3\end{cases}$，則下列哪些敘述是正確的？

(1) L 與 x 軸歪斜　　(2) L 與 z 軸歪斜

(3) L 與 xy 平面平行　　(4) L 與 xz 平面平行

(5) L 與平面 $2x+5y+z=4$ 垂直

6. 試選出下列哪些選項的 P_1 與 P_2 是相等的？

(1) P_1 表連續投擲一個公正的骰子3次，三次都出現6點的機率；P_2 表一次投擲三個公正的骰子，同時出現3個6點的機率

(2)同時投擲2個公正骰子一次，P_1 表出現一個3點一個4點的機率；P_2 表兩個骰子都出現3點的機率

(3) P_1 表投擲2個均勻硬幣時，恰好出現1個正面的機率；P_2 表投擲4個均勻硬幣時，恰好出現2個正面的機率

(4)連續投擲一公正的硬幣5次，P_1 表依序擲出「正正正正正」的機率；P_2 表依序擲出「正正正正反」的機率

(5)一袋中有2白2黑球，現自袋中連續取球兩次，每次取一球且取出後不放回。當已知第一次取出的是白球時，令 P_1 表第二次取出黑球的機率；當已知第二次取出的是白球時，令 P_2 表第一次取出黑球的機率

7. 已知甲袋有2個10元硬幣，乙袋有2個5元硬幣，今自甲、乙兩袋同時隨機任取一硬幣交換，稱為一局。則長期交換過程中，下列哪些為真？

(1)當甲袋持有15元的狀態中，經一局交換後使其持有20元的機率為 $\frac{1}{4}$

(2)當甲袋持有15元的狀態中，經一局交換後使其持有15元的機率為 $\frac{1}{3}$

(3)第三局結束時，甲袋持有20元、15元、10元的機率分別為 $\frac{1}{8}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{8}$

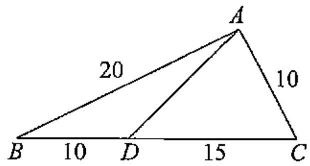
(4)經長期交換後，甲袋持有20元的機率為 $\frac{1}{6}$

(5)經長期交換後，甲袋持有錢幣的期望值為15元

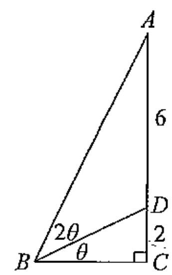
三、選填題（32分）

說明：1. 第A至D題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（⑧～⑰）。
2. 每題完全答對得8分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 如右圖，在$\triangle ABC$中，D為$\overline{BC}$上一點。若$\overline{AB}=20$，$\overline{AC}=10$，$\overline{BD}=10$，$\overline{DC}=15$，試求$\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=$ $\dfrac{⑧}{⑨}$（以最簡分數表示之）。



B. 如右圖，直角$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，D在$\overline{AC}$上，已知$\overline{AD}=6$，$\overline{CD}=2$，$\angle ABD=2\theta$，$\angle CBD=\theta$，試求$\overline{BD}=$ ⑩$\sqrt{⑪}$（以最簡根式表示之）。



C. 有一個六面刻上1，1，1，2，2，3的均勻骰子，設P_n表示擲此骰子n次點數和是偶數的機率。若$P_{n+1}=aP_n+b$，a、b為常數，則數對$(a，b)=$ $\left(\dfrac{⑫⑬}{⑭}，\dfrac{⑮}{⑯}\right)$（化為最簡分數）。

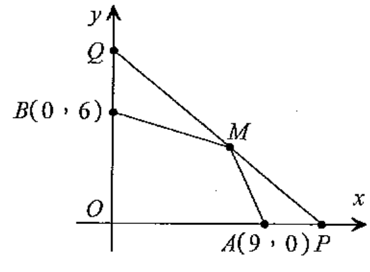
D. 設$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$為三階方陣，且滿足$[1\ \ 0\ \ 0]A=[1\ \ 2\ \ 1]$，$[1\ \ 1\ \ 1]A=[3\ \ 3\ \ 2]$，$[1\ \ 0\ \ 2]A=[5\ \ 4\ \ 1]$，則$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$ ⑰。

第貳部分：非選擇題（占20分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（1、2），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

1. 已知實係數多項方程式$x^3-ax^2+4x+b=0$有三正根α、β、γ，試求a的最小值為何？（5分）b的最小值為何？（5分）

2. 如右圖，平面坐標上有$A(9，0)$，$B(0，6)$，又P、Q分別為x軸與y軸正向上的動點，且$\overline{PQ}=15$，若M點在$\overline{PQ}$上，滿足$\overline{PM}：\overline{QM}=2：3$，試求四邊形$OAMB$面積的最大值為何？（10分）



2011指定考科模擬試卷

數學甲解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

【解說】$\log\frac{5}{7}=a \Rightarrow a=\log 5-\log 7$……①

$\log 175=b \Rightarrow b=2\log 5+\log 7$……②

由①×2－②得 $2a-b=-3\log 7$

$\therefore \log 7=-\frac{2a-b}{3}=\frac{b-2a}{3}$

∴ 故選 (1)

2. (5)

【解說】設這個陶器距離現在 t 年，依題意得 $90\%=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5570}}$

$\Rightarrow \log\frac{9}{10}=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5570}} \Rightarrow 2\log 3-1=\frac{t}{5570}\cdot\log 2^{-1}$

$\Rightarrow 0.4471\times 2-1=-(0.3010)\cdot\frac{t}{5570}$

$\therefore t=\frac{5570\times 0.0458}{0.3010}\doteqdot 848$（年以前）

西元 2010 年減去 848 年，得大約西元 1162 年，即五代十國、宋年代，故選 (5)

3. (4)

【解說】第一年年底餘款 $a_1=100\times(1+20\%)-100\times 20\%\times 20\%$
$=116$（萬元）

設第 n 年年底餘款有 a_n

則第 $n+1$ 年年底餘款有

$a_{n+1}=a_n\times(1+20\%)-a_n\times 20\%\times 20\%=1.16a_n$

$\therefore$ 數列 $<a_n>$ 滿足 $\begin{cases}a_1=116\\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=1.16\end{cases}$ 為一等比數列

$\therefore a_{10}=116\times 1.16^9=100\times 1.16^{10}$

而十年後連本帶利的貸款為 100×1.05^{10}

∴ 償還後小精的總獲利為

$100\times(1.16^{10}-1.05^{10})=100(4.41-1.62)=279$（萬元）

故選 (4)

4. (4)

【解說】A^8 的反矩陣不存在

$\Rightarrow |A^8|=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow 2+x=0 \quad \therefore x=-2$

故選(4)

二、多選題

5. (1)(2)(3)

【解說】(1)○ 直線 L：$\begin{cases}x=4+5t\\ y=-3-2t\\ z=3\end{cases}$ 與 x 軸 $\begin{cases}x=s\\ y=0\\ z=0\end{cases}$ 歪斜

(2)○ 直線 L：$\begin{cases}x=4+5t\\ y=-3-2t\\ z=3\end{cases}$ 與 z 軸 $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=s\end{cases}$ 歪斜

(3)○ ∵ 直線 L 的方向向量 $\vec{d}=(5,-2,0)$

xy 平面（$z=0$）的法向量 $\vec{n_1}=(0,0,1)$

$\Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{n_1}=0$

∴ 直線 L 與 xy 平面平行

(4)× 同 (3)

xz 平面（$y=0$）的法向量 $\vec{n_2}=(0,1,0)$

$\Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{n_2}\neq 0$

∴ 直線 L 與 xy 平面不平行

(5)× 同 (3)

∵ 平面 $2x+5y+z=4$ 的法向量 $\vec{n_3}=(2,5,1)$

$\Rightarrow \vec{d}\cdot\vec{n_3}=0$

∴ 直線 L 與平面 $2x+5y+z=4$ 平行

故選 (1)(2)(3)

6. (1)(4)(5)

【解說】(1)○ $P_1=P_2=\frac{1}{216}$

(2)× $P_1=\frac{2}{36}$，$P_2=\frac{1}{36}$

(3)× $P_1=\frac{C^2_1}{4}$，$P_2=\frac{C^4_2}{16}$

(4)○ $P_1=P_2=\frac{1}{2^5}$

(5)○ $P_1=P$(第二次黑球 | 第一次白球)$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

$P_2=P$(第一次黑球 | 第二次白球)

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

故(1)(4)(5)

7. (1)(3)(4)(5)

【解說】(1)(2)設甲袋有 2 個 10 元，1 個 10 元 1 個 5 元，2 個 5 元的事件各為 A_1，A_2，A_3

$A_1\begin{cases}\xrightarrow{0} A_1\\ \xrightarrow{1} A_2\\ \xrightarrow{0} A_3\end{cases}$，$A_2\begin{cases}\xrightarrow{\frac{1}{4}} A_1\\ \xrightarrow{\frac{1}{2}} A_2\\ \xrightarrow{\frac{1}{4}} A_3\end{cases}$，$A_3\begin{cases}\xrightarrow{0} A_1\\ \xrightarrow{1} A_2\\ \xrightarrow{0} A_3\end{cases}$

$\therefore$ 轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}$

(3)○ $X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow X_1=AX_0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_2=AX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow X_3=AX_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}$

(4)○　設穩定狀態$X=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，且$a+b+c=1$

$$\because\ AX=X \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{b}{4} \\ a+\frac{b}{2}+c \\ \frac{b}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow a:b:c=1:4:1$$

$\therefore\ a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=\frac{1}{6}$

(5)○　$\frac{1}{6}\times 20+\frac{2}{3}\times 15+10\times\frac{1}{6}=15$（元）

故選 (1)(3)(4)(5)

三、選填題

A. $\frac{1}{3}$

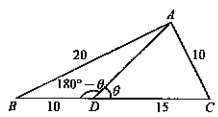
【解說】設$\angle ADC=\theta$，$\angle ADB=180°-\theta$

$\because\ \frac{10}{\sin\angle BAD}=\frac{20}{\sin(180°-\theta)}$

$\Rightarrow \sin\angle BAD=\frac{\sin(180°-\theta)}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$……①

$\because\ \frac{15}{\sin\angle CAD}=\frac{10}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \sin\angle CAD=\frac{3\sin\theta}{2}$…………②



$\therefore$ 由$\frac{①}{②}$得$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{1}{3}$

B. $4\sqrt{3}$

【解說】$\tan\theta=\frac{2}{\overline{BC}}$，$\tan 3\theta=\frac{8}{\overline{BC}}$　$\Rightarrow$ $\tan 3\theta=4\tan\theta$

$\Rightarrow \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\frac{4\sin\theta}{\cos\theta}$　$\Rightarrow \frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta-3\cos\theta}=\frac{4\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{3-4\sin^2\theta}{4\cos^2\theta-3}=4$　$\Rightarrow 3-4\sin^2\theta=16(1-\sin^2\theta)-12$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{12}$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$　即$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$　$\Rightarrow$　$\frac{2}{\overline{DB}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore\ \overline{BD}=4\sqrt{3}$

C. $(\frac{-1}{3}，\frac{2}{3})$

【解說】$\because$ 每次得奇數點機率為$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，偶數點機率為$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

依題意得$P_{n+1}=\frac{1}{3}\times P_n+\frac{2}{3}\times(1-P_n)=-\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}$

$\therefore$ 數對$(a、b)=(\frac{-1}{3}，\frac{2}{3})$

D. 1

【解說】依題意得$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=0+0+1=1$

第貳部分：非選擇題

1. a的最小值為$2\sqrt{3}$，b的最小值為$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$

【解說】由根與係數關係得$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4 \\ \alpha\beta\gamma=-b \end{cases}$ 且$\alpha、\beta、\gamma>0$

由算幾不等式知$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha}$

$\Rightarrow\ \frac{4}{3}\geq\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$\Rightarrow\ b^2\leq\frac{64}{27}$ $\Rightarrow$ $-\frac{8\sqrt{3}}{9}\leq b<0$（$\because\ b<0$）

$\therefore$ b的最小值為$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$（此時$\alpha=\beta=\gamma$）

又$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{3}\geq\sqrt[3]{-b}$ $\Rightarrow$ $a\geq 3\sqrt[3]{-b}$

"="成立於$\alpha=\beta=\gamma$時，

此時a有最小值為$3\sqrt[3]{-b}=3\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}=2\sqrt{3}$

2. $27\sqrt{2}$

【解說】設$P(x，0)$，$Q(0，y)$

$\because\ \overline{PM}:\overline{QM}=2:3$ $\Rightarrow$ $M(\frac{3x}{5}，\frac{2y}{5})$

又$\overline{PQ}=15$ $\Rightarrow$ $\sqrt{(x-0)^2+(0-y)^2}=15$

$\therefore\ x^2+y^2=225$

由柯西不等式得

$(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(x+y)^2$ $\Rightarrow$ $225\times 2\geq(x+y)^2$

$\therefore\ -15\sqrt{2}\leq x+y\leq 15\sqrt{2}$

$\therefore$ 所求四邊形$OAMB$面積

$=\triangle OAM$面積$+\triangle OBM$面積

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\frac{2y}{5}+\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\frac{3x}{5}$

$=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{2y}{5}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{3x}{5}$

$=\frac{9}{5}(x+y)\leq\frac{9}{5}\times 15\sqrt{2}=27\sqrt{2}$