九十八學年度指定科目考試模擬試卷（A卷）

數學乙考科

【教師解答卷】

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘。

考型題數：

- 第壹部分選擇題，共 10 題
- 第貳部分非選擇題，共 2 題

作答方式：

- 請用黑色筆在「答案卷」上作答。

命題老師：台中女中／李福海老師

祝考試順利

康熹文化

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 72 分）

一、單選題（12 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」．每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止．未作答者，不給分亦不扣分．

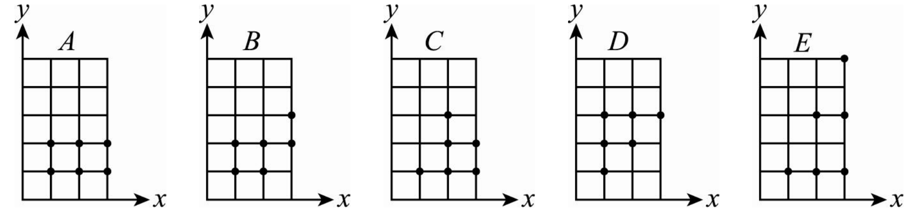
1. 某人射箭的命中率為 $\frac{3}{5}$，而每次射箭的結果是互相獨立的，今此人朝同一個目標連射 5 次，若：

   a 為 5 次命中 2 次之機率；
   b 為 5 次命中 3 次之機率；
   c 為 5 次命中 4 次之機率．

   則下列哪一個選項是正確的？
   (1) $a>b>c$
   (2) $b>c>a$
   (3) $a>c>b$
   (4) $c>a>b$
   (5) $c>b>a$ ．

   參考答案：(2)
   命題出處：選修數學(I) 第一章 機率與統計（II）
   測驗目標：了解獨立事件
   試題解析：$a=C_2^5(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^3=\frac{720}{5^5}$ ；
   $b=C_3^5(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2=\frac{1080}{5^5}$ ；
   $c=C_4^5(\frac{3}{5})^4(\frac{2}{5})=\frac{810}{5^5}$ ，
   $\therefore b>c>a$ ．

2. 有 A，B，C，D，E 五組資料的散布圖，如下圖所示．每組各有六個資料點，計算各組相關係數時，發現有兩組資料的相關係數相同，試問是哪兩組？



   (1) A，B
   (2) B，C
   (3) C，D
   (4) D，E
   (5) B，D ．

   參考答案：(4)

命題出處：選修數學(I) 第一章 機率與統計（II）

測驗目標：了解相關係數的應用

試題解析：$r_D(x, y) = r_D(x-1, y-1)$，

將 A 組資料平移：$(0, 0)$，$(0, 1)$，$(0, 2)$，$(1, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 2)$

$\Rightarrow \overline{X} = \dfrac{2}{3}$，$\overline{Y} = \dfrac{4}{3}$．

$$\because r_D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 . \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}} = \frac{\frac{15}{9}}{\sqrt{\frac{30}{9}\times\frac{30}{9}}} = \frac{1}{2},$$

又 $r_D(x, y) = r_D(y, x) = r_D(y, 2x-1) = r_E(x, y)$，故選(4)．

另 $r_A(x, y) = r_A(x-1, y-1)$，

將 D 組資料平移：$(0, 0)$，$(1, 0)$，$(2, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 1)$，$(2, 1)$

$\Rightarrow \overline{X} = 1$，$\overline{Y} = \dfrac{1}{2}$，

$$\therefore r_A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}} = 0,\ 同理，r_B = \sqrt{\frac{6}{17}},\ r_C = \frac{1}{\sqrt{85}}\ .$$

二、多選題（28 分）

說明：第 3 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的．選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」．每題 7 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.4 分，每答錯一個選項，倒扣 1.4 分，完全答對得 7 分；整題未作答者，不給分亦不扣分．在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.4 分．倒扣到本大題之實得分數為零為止．

3. 若一函數 $f(x) = a^x + b$ 之圖形中含有 $(1, 2)$ 與 $(2, 7)$ 兩點，則下列哪些選項中的點必在函數 $g(x) = \log_a(x-b)$ 之圖形上？

(1) $(2, -7)$

(2) $(2, 1)$

(3) $(1, 7)$

(4) $(7, 2)$

(5) $(3, 12)$．

參考答案：(2)(4)

命題出處：第二冊 第一章 指數與對數

測驗目標：了解指數函數與對數函數圖形之對稱

試題解析：函數 $f(x)$ 之圖形與函數 $g(x)$ 之圖形對稱於 $y = x$，

函數 $f(x)$ 之圖形中含有 $(1, 2)$ 與 $(2, 7)$

$\Rightarrow$ 函數 $g(x)$ 之圖形必含有 $(2, 1)$ 與 $(7, 2)$．

4. 擲三顆公正的骰子一次，若恰有一顆骰子出現 6 點時，可得 120 元，有兩顆骰子出現 6 點時，可得 240 元，三顆骰子均出現 6 點時，可得 360 元，則下列選項哪些是正確的？

(1)恰有一顆骰子出現 6 點的機率為 $\frac{75}{216}$

(2)有兩顆骰子出現 6 點的機率為 $\frac{25}{216}$

(3)三顆骰子均不為 6 點的機率為 $\frac{125}{216}$

(4)投擲一次得錢的期望值為 108 元

(5)若投擲骰子之前須先繳交 72 元，則此遊戲對玩家不利．

參考答案：(1)(3)(5)

命題出處：第四冊　第三章　機率與統計(I)

測驗目標：了解獲利期望值

試題解析：(1) $\frac{C_1^3\times 5^2}{6^3}=\frac{75}{216}$ ．

(2) $\frac{C_2^3\times 5}{6^3}=\frac{15}{216}$ ．

(3) $\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$ ．

(4) $E(X)=120\times\frac{75}{216}+240\times\frac{15}{216}+360\times\frac{1}{216}=60$（元）．

(5) $60<72\Rightarrow$ 對玩家不利．

5. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式，則下列選項哪些是正確的？

(1) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸至少交於一點

(2)若 $f(2-\sqrt{3})=-7+2\sqrt{3}$，則 $f(2+\sqrt{3})=-7-2\sqrt{3}$

(3)若 $-\frac{2}{3}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，則 $3\mid a$ 且 $(-2)\mid d$

(4)若方程式 $f(x)=0$ 有一實根為 0 與兩虛根，則 $a\times c>0$

(5)若 -1 與 2 之間有實數 x，使得 $f(x)=0$，則 $f(-1)f(2)<0$ ．

參考答案：(1)(4)

命題出處：第一冊　第三章　多項式

測驗目標：了解一次因式檢驗定理、有理係數方程式之無理根成對定理與勘根定理

試題解析：(1) $f(x)=0$ 為實係數三次方程式

$\Rightarrow$ 至少有一實根 $\Rightarrow$ 與 x 軸至少交於一點．

(2)實係數函數，若 $f(2-\sqrt{3})=-7+2\sqrt{3}$，則 $f(2+\sqrt{3})$ 不一定為 $-7-2\sqrt{3}$ ．

(3) $f(x)=0$ 為整係數方程式才成立．

(4)有一實根為 0 $\Rightarrow d=0$ ．

設 $f(x)=0$ 之兩虛根為 α，$\beta\Rightarrow\alpha\beta=\frac{c}{a}>0\Rightarrow ac>0$ ．

(5) -1 與 2 之間有根，$f(-1)f(2)$ 可能大於 0（偶數個根）．

6. 教育部欲推行 12 年國教，在一次民意調查中，成功訪問了 900 位成年民眾，其中有 495 位的民眾贊成 12 年國教，在 95 %的信心水準下，抽樣誤差在正負 3 個百分點以內，則下列哪些選項是正確的？
(1)此次抽樣所得之 95 %信賴區間為 [0.49 , 0.61]
(2)此次調查報告所得信賴區間顯示有 95%的機率包含真正贊成 12 年國教的民眾比例
(3)如果重新再訪問另外 900 位成年民眾，贊成 12 年國教的民眾比例會落在信賴區間內
(4)在同樣的條件下，降低信心水準，抽樣誤差會減少
(5)若想抽樣誤差縮短為正負 2 個百分點以內，則重新抽樣訪問的民眾人數保守估計至少為 2500 人．

參考答案：(4)(5)

命題出處：第四冊　第三章　機率與統計(I)

測驗目標：了解信賴區間的求法與信心水準的解讀

試題解析：(1) $\hat{p}=\dfrac{495}{900}=0.55\Rightarrow$ 信賴區間為 $[0.55-0.03,\ 0.55+0.03]=[0.52,\ 0.58]$ ．

(2)若重複作 100 次的抽樣，所得到的 100 個信賴區間中，大概會有 95 個包含真正贊成 12 年國教民眾的比例．

(3)信賴區間是推估母體參數可能被包含的區間，而不是推估樣本．

(4)信心水準降低，會減少抽樣誤差．

(5) $2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=2\sqrt{\dfrac{1}{n}[-(\hat{p}-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}]}\le\sqrt{\dfrac{1}{n}}=2\%$,

$\Rightarrow n=2500$,　$\therefore$ 至少 2500 人．

三、選填題（32 分）

說明：A 至 D 各題為選填題，請在答案卷上所標示的列號（7-15）內．每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分．

A. 某家電信業者舉辦「傳簡訊，送百萬」活動，「恭喜你接獲這則幸運簡訊，若你在一分鐘之內，將這則簡訊傳給 2 位本公司行動電話的用戶，你就有機會獲得一百萬元的獎金．」若傳送每通簡訊該公司可獲利 0.2 元，而用戶收到簡訊後傳出 2 通簡訊的最快時間大約 1 分鐘．則在該公司發出這一通簡訊給某一位用戶後，最快在 ⑦⑧ 分鐘之內，便可藉由此簡訊傳遞的獲利，來支付這一百萬元的獎金．（四捨五入計算至整數，$\log 2=0.3010$）

參考答案：22

命題出處：第二冊　第一章　指數與對數

測驗目標：了解指數與對數的應用

試題解析：$0.2\times(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)\ge 1\times10^6\Rightarrow 2\times\dfrac{2^n-1}{2-1}\ge 5\times10^6\Rightarrow 2^{n+1}>5\times10^6$,

$\therefore (n+1)\log 2>6+\log 5\Rightarrow n+1>22.3\Rightarrow n=22$ 最小．

B. 若某實驗室以血液偵測老年癡呆症技術的正確率爲 90 %（即患老年癡呆症者 90 %被偵測出有老年癡呆症，未患老年癡呆症者 90 %被偵測出確實沒有）. 今有一群人接受此血液偵測．實驗後，血液偵測判斷爲未患老年癡呆症者，經證實其中有 $\frac{1}{22}$ 是患老年癡呆症的．試問這群人當中真正患老年癡呆症者所占比率爲 $\dfrac{⑨}{⑩⑪}$.（化成最簡分數）

參考答案：$\dfrac{3}{10}$

命題出處：選修數學(I) 第一章 機率與統計(II)

測驗目標：了解條件機率的應用

試題解析：設真正患老年癡呆症的比率爲 x,
未患老年癡呆症的比率爲 $1-x$,
$\because \dfrac{0.1x}{0.1x+0.9(1-x)}=\dfrac{1}{22}$, $\therefore x=\dfrac{3}{10}$.

C. 某咖啡公司有甲、乙兩家烘焙工廠，兩家工廠每日均可烘焙 A，B，C 三種不同等級的咖啡豆，如右表所列（單位：公斤／日），今該公司與零售商簽約，每週至少供應 A 等級咖啡豆 480 公斤，B 等級咖啡豆 320 公斤，C 等級咖啡豆 960 公斤，但甲工廠每開工一日必須支出 4 萬元，乙工廠每開工一日必須支出 3 萬元，則甲工廠每週開工 ⑫ 日，乙工廠每週開工 ⑬ 日，才能使公司開支最少．

等級／廠別	A	B	C
甲	120	40	80
乙	40	40	240

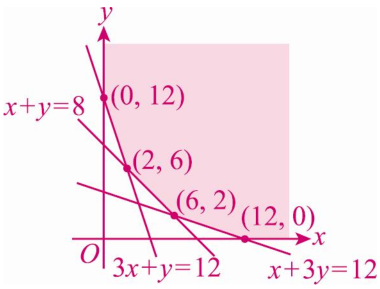
參考答案：2；6

命題出處：選修數學(I) 第三章 不等式

測驗目標：了解線性規劃可行解區域之極值產生處

試題解析：設甲工廠每週開工 x 日，乙工廠每週開工 y 日，

$$\text{由題意知}\begin{cases}120x+40y\ge 480\\40x+40y\ge 320\\80x+240y\ge 960\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y\ge 12\\x+y\ge 8\\x+3y\ge 12\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases},$$



所求目標函數 $f(x, y)=4x+3y$（萬元），
$\therefore f(2, 6)=26$（萬元）最少
$\Rightarrow$ 甲工廠每週開工 2 日，乙工廠每週開工 6 日．

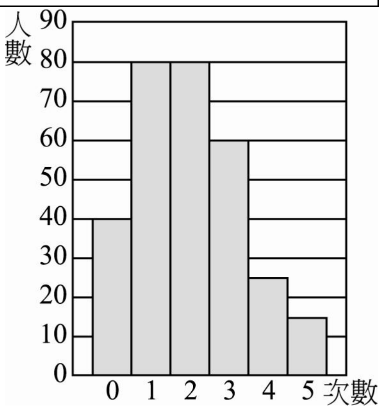
D. 趙氏與錢氏兩對夫婦來拜訪小華家，已知七人圍坐一個圓桌吃飯，其中小華坐在父母之間，其餘夫妻相鄰而坐，則共有 ⑭⑮ 種坐法．

參考答案：16
命題出處：第四冊　第二章　排列、組合
測驗目標：了解環狀排列
試題解析：小華與父母視爲一物，趙氏與錢氏夫婦各視爲一物，
三物環狀排列，方法有 $\frac{3!}{3}=2$（種），
又小華的父母與兩對夫婦之位置均可互換，方法有 $2^3=8$（種），
$\therefore$ 共有 $2\times 8=16$（種）．

第貳部分：非選擇題（占 28 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），與子題號（(1)、(2)、⋯），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分．每題配分標於題末．

一、某高中一年級學生 300 人（視爲母群體）以罰球線投籃的命中次數做爲體育期末考成績，若每個同學投籃 5 次，命中次數與人數統計圖如右．假設「命中 k 次的人數與總人數之比值」恰與二項分配『重複試驗 5 次（$n=5$），每次成功之機率爲 $\frac{2}{5}$（$p=\frac{2}{5}$）』中成功 k 次的機率 $P(X=k)$ 相同，則：



(1)投籃命中次數的期望值爲多少？（3 分）
　標準差爲多少？（3 分）
(2)投籃命中次數在『平均數正負兩個標準差之間』所占的人數百分比爲多少?（4 分）
(3)今在學生中隨機選取 25 位學生，每個學生投一球，結果有 16 人投中，試計算 95% 的信心水準下，該高中一年級學生投籃命中率的信賴區間．（4 分）

參考答案：(1) 2 次；$\frac{\sqrt{30}}{5}$ 次　(2) 95%　(3) [0.448, 0.832]
命題出處：選修數學(I)　第一章　機率與統計(II)
測驗目標：了解二項分配的平均數、標準差與常態分配的關係及信賴區間的求法
試題解析：(1) $\mu=np=5\times\frac{2}{5}=2$（次），$\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{5\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$（次）．

(2) $2\pm 2\times\frac{\sqrt{30}}{5}$（次）：0，1，2，4 次 $\Rightarrow \frac{300-15}{300}=95\%$．

(3) $\frac{16}{25}\pm 2\sqrt{\frac{\frac{16}{25}\times\frac{9}{25}}{25}}=0.64\pm 0.192$ $\Rightarrow$ 信賴區間爲 [0.448, 0.832]．

二、一袋中有 5 個球，分別寫上 1，2，3，4，5 號，今由其中任取一球記下其號碼後放回袋中，如此繼續 n 次，若 a_n 表記錄到 n 次時數字和爲偶數的機率，b_n 表記錄到 n 次時數字和爲奇數的機率．已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=A^{n-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$．

(1)求二階方陣 A．(3 分)
(2)求 a_3．(3 分)
(3)若 $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $P^{-1}AP$．(4 分)
(4)求 A^{10}．(4 分)

參考答案：(1) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$　(2) $\frac{62}{125}$　(3) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

命題出處：選修數學(I) 第二章矩陣

測驗目標：了解矩陣的乘法及反方陣的應用

試題解析：(1) $\because a_1=\frac{2}{5}$，$b_1=\frac{3}{5}$，

$n=2$ 時，$a_2=b_1\times\frac{3}{5}+a_1\times\frac{2}{5}$，$b_2=a_1\times\frac{3}{5}+b_1\times\frac{2}{5}$，

$$\therefore \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

(2) $$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{62}{125} \\ \frac{63}{125} \end{bmatrix}\Rightarrow a_3=\frac{62}{125}.$$

(3) $$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) $$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{10}&=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)\\&=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A\cdots(PP^{-1})AP\\&=P^{-1}AIAIA\cdots IAP=P^{-1}A^{10}P\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{10} = P(P^{-1}AP)^{10}P^{-1},$$

$$\therefore A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{5})^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(\frac{1}{5})^{10} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$