

# 九十八學年度指定科目考試模擬試卷（B卷）

## 數學乙考科

### 【教師解答卷】

#### —作答注意事項—

考試時間：80分鐘。

考型題數：

- 第壹部分選擇題，共 11 題
- 第貳部分非選擇題，共 2 題

作答方式：

- 請用黑色或藍色筆在「答案卷」上作答。

命題老師：台中女中／謝宏政老師

祝考試順利

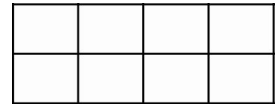
有著作權，侵害必究

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（12 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，填寫在答案卷上。每題答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零止，未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 任意將 4 個  $a$ ，2 個  $b$ ，2 個  $c$  填入右圖，但需使上下兩列各有文字  $a$  兩個， $b$ ， $c$  各一個，若每種填法機會均等，則上下兩列在同行中沒有相同文字的機率是多少？



- (1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{1}{12}$  (3)  $\frac{2}{35}$  (4)  $\frac{1}{35}$  .

參考答案：(1)

命題出處：排列組合與機率

測驗目標：不盡相異物的排列方式

試題解析： $n(S) = \binom{4!}{2} = 144$ （上下二列均為  $a, a, b, c$  的排列），

$n(A) =$  先排第一列  $a, a, b, c$ ： $\frac{4!}{2}$ ，而後排第二列，

只有二種符合： $b, c, a, a$  或  $c, b, a, a \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2} \times 2 = 4!$ ，

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$ ，故選(1)。

2. 某地區有  $A$ 、 $B$  兩家超市，根據調查每年  $A$  超市保有 60% 的顧客，有 40% 轉向  $B$  超市，而  $B$  超市保有 40% 的顧客，有 60% 轉向  $A$  超市，已知目前  $A$ 、 $B$  兩超市的占有率分別為 30% 及 70%，且顧客的總人數不變，若超市經營會趨於穩定，則在穩定狀態下， $A$  超市的占有率為

- (1) 20% (2) 25% (3) 50% (4) 60% .

參考答案：(4)

命題出處：矩陣

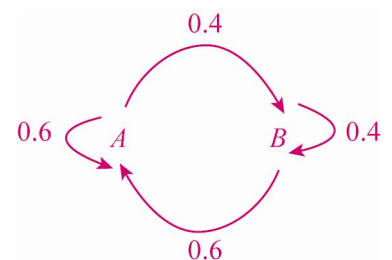
測驗目標：馬可夫鏈的應用

試題解析：轉移矩陣  $M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{matrix}$ ，

又達穩定狀態，即  $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2x = 3y$  且  $x + y = 1$ ， $\therefore x = 60\%$ ， $y = 40\%$ ，

故選(4)。

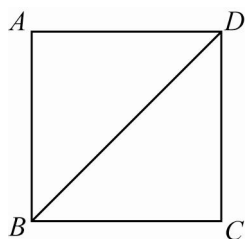


二、多選題 (32 分)

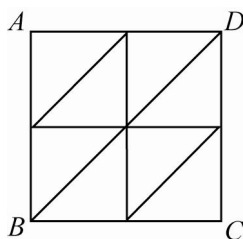
說明：第 3 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，填寫在答案卷上。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。

3. 已知一正方形  $ABCD$  依下列方式分割此正方形為數個全等且不重疊的直角三角形：

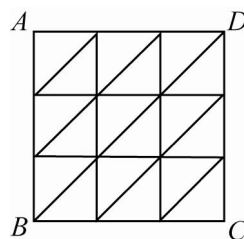
- (1) 當  $n=1$ ，如圖(一)正方形  $ABCD$  被分割為 2 個直角三角形，共 5 個邊
- (2) 當  $n=2$ ，如圖(二)正方形  $ABCD$  被分割為 8 個直角三角形，共 16 個邊
- (3) 當  $n=3$ ，如圖(三)正方形  $ABCD$  被分割為 18 個直角三角形，共 33 個邊



圖(一)



圖(二)



圖(三)

依照上述規則，當  $n=50$  時，正方形  $ABCD$  會被分割為  $a$  個直角三角形，共  $b$  個邊，則下列各敘述何者正確？

- (1)  $a = 5000$
- (2)  $b = 7500$
- (3)  $|a - b| = 2500$
- (4)  $a, b$  的最大公因數 = 200
- (5)  $a + b = 12500$  .

參考答案：(1)(4)

命題出處：數列與級數

測驗目標：級數和的觀察與應用

試題解析：令直角三角形數目為  $\langle a_n \rangle$ ，邊數為  $\langle b_n \rangle$ ，

$$\text{由 } a_1 = 2,$$

$$a_2 = 2(1+3) = 8,$$

$$a_3 = 2(1+3+5) = 18$$

$$\Rightarrow a_{50} = 2(1+3+5+\cdots+99) = 5000, \text{ 即所求 } a = 5000 .$$

$$b_1 = 3 \times [1 \times 2] - 1 = 5,$$

$$b_2 = 3 \times [(1+2) \times 2] - 2 = 16,$$

$$b_3 = 3 \times [(1+2+3) \times 2] - 3 = 33$$

$$\Rightarrow b_{50} = 3 \times [(1+2+\cdots+50) \times 2] - 50 = 7600,$$

即所求  $b = 7600$ ，故選(1)(4)。

4. 設  $f(x) = 6x^{100} - x^2 - 4$ ，則下列何者正確？（其中  $i = \sqrt{-1}$ ）

(1)  $f(i) = 1$    (2)  $f(f(f(1))) = 1$    (3)  $f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{13 - 7\sqrt{3}i}{2}$

(4) 以  $x^2 - x + 1$  除  $f(x)$  所得餘式為  $-7x - 3$    (5) 以  $x^2 - 1$  除  $f(x)$  所得餘式為  $1$  .

參考答案：(2)(4)(5)

命題出處：多項式

測驗目標：餘式定理的運算

試題解析：∵  $f(x) = 6x^{100} - x^2 - 4$ ，

$$\therefore (1) f(i) = 6(1) - (-1) - 4 = 3 .$$

$$(2) f(1) = 6 - 1 - 4 = 1 \Rightarrow f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1) = 1 .$$

$$(3) \text{ 令 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \omega + \omega^2 + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1,$$

$$\therefore \text{所求} = f(\omega) = 6\omega^{100} - \omega^2 - 4 = 6\omega - \omega^2 - 4 = \frac{-13 + 7\sqrt{3}i}{2} .$$

$$(4) \text{ 由 } (x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1,$$

$$\therefore f(x) = 6x^{100} - x^2 - 4 = 6[(x^3)^{33} \cdot x] - x^2 - 4$$

$$= (x^3 + 1)Q(x) + R_1(x) = (x^3 + 1)Q(x) + 6(-1)^{33}x - x^2 - 4$$

$$= (x^3 + 1)Q(x) - x^2 - 6x - 4 = (x^2 - x + 1)[(x+1)Q(x) - 1] - 7x - 3,$$

即：以  $x^2 - x + 1$  除  $f(x)$  所得餘式為  $-7x - 3$  .

$$(5) f(x) = 6x^{100} - x^2 - 4 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b,$$

$$f(1) = 1 = a + b \cdots \cdots \textcircled{1},$$

$$f(-1) = 1 = -a + b \cdots \cdots \textcircled{2},$$

由①②得  $a = 0$ ， $b = 1$ ，即：以  $x^2 - 1$  除  $f(x)$  所得餘式為  $1$  .

故選(2)(4)(5) .

5. 二年甲班某次週考國文、英文、數學三科，成績如下表，班上小胖的國文、英文、數學分別考了 80 分，76 分，71 分，則下列各敘述何者正確？（已知二年甲班全班有 50 人）

	全班算術平均	標準差
國文	76.1	4.5
英文	65.3	5.3
數學	60.5	8.7

- (1) 全班三科成績的算術平均數 = 67.3  
 (2) 小胖三科成績的算術平均數 = 78.0  
 (3) 在班上，小胖這三科的排名以英文最好  
 (4) 若已知全班英文科成績呈常態分布，則全班約有 42 人達及格（60 分）標準  
 (5) 若老師對全班每個人的數學成績都加 15 分（加分後沒有人超過 100 分），則數學科成績的標準差亦為 8.7 .

參考答案：(1)(3)(4)(5)

命題出處：統計(I)(II)

測驗目標：分數的標準化與常態分布

試題解析：(1)  $\bar{x} = \frac{76.1+65.3+60.5}{3} = 67.3$  .

$$(2) \frac{80+76+71}{3} \approx 75.7 .$$

$$(3) \text{ 小胖的國文標準化成績為 } \frac{80-76.1}{4.5} \approx 0.87 ,$$

$$\text{英文標準化成績為 } \frac{76-65.3}{5.3} \approx 2.02 ,$$

$$\text{數學標準化成績為 } \frac{71-60.5}{8.7} \approx 1.21 ,$$

故以英文之排名最好 .

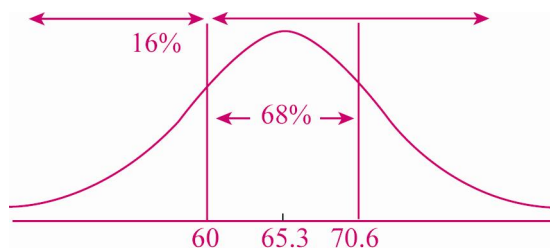
- (4) 由常態分布 68-95-99.7 原則，  
不及格人數為

$$50 \times \left( \frac{1-68\%}{2} \right) = 8 \text{ (人)},$$

故及格人數 42 人 .

$$(5) S_{x+15} = S_x .$$

故選(1)(3)(4)(5) .



6. 已知  $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，設  $A = 2^{106} + 3^{66}$ ，則下列何者正確？

(1)  $2^{106} > 3^{66}$  (2)  $2^{106} < 3^{66}$  (3)  $A$  為 31 位數 (4)  $A$  的個位數字為 3

(5)  $A$  的首位數字為 1。

參考答案：(1)(4)(5)

命題出處：指數與對數

測驗目標：首數與尾數的應用

試題解析：令  $2^{106} = a_1 \times 10^{n_1}$ ， $1 \leq a_1 < 10$ ， $n_1 \in \mathbf{Z}$

$$\Rightarrow \log 2^{106} = 106 \log 2 \doteq 31.906 = n_1 + \log a_1, \text{ 即 } n_1 = 31, \log a_1 = 0.906,$$

$$\text{由 } \log 8 < \log a_1 = 0.906 < \log 9 \Rightarrow 8 < a_1 < 9, \text{ 故 } 8 \times 10^{31} < 2^{106} < 9 \times 10^{31},$$

$$\text{又設 } 3^{66} = a_2 \times 10^{n_2}, 1 \leq a_2 < 10, n_2 \in \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow \log 3^{66} = 66 \log 3 \doteq 31.4886 = n_2 + \log a_2, \text{ 即 } n_2 = 31, \log a_2 = 0.4886,$$

$$\text{由 } \log 3 < \log a_2 = 0.4886 < \log 4, \therefore 3 < a_2 < 4,$$

$$\text{則 } 3 \times 10^{31} < 3^{66} < 4 \times 10^{31},$$

$$\text{故 } 2^{106} > 3^{66} \text{ 且 } 11 \times 10^{31} < A = 2^{106} + 3^{66} < 13 \times 10^{31}$$

$$\Rightarrow 1.1 \times 10^{32} < A < 1.3 \times 10^{32}, \therefore A \text{ 為 } 33 \text{ 位數,}$$

$$\text{且 } A \text{ 的首位數字為 } 1, \text{ 又 } 2^{106} \text{ 除以 } 10 \text{ 的餘數為 } 4, 3^{66} \text{ 除以 } 10 \text{ 的餘數為 } 9,$$

$$\therefore 2^{106} + 3^{66} \text{ 除以 } 10 \text{ 的餘數為 } 3 \text{ (個位數字為 } 3), \text{ 故選(1)(4)(5).}$$

### 三、選填題 (30 分)

說明：A 至 E 各題為選填題，填寫在答案卷上所標示的列號 (7-20) 內。每一題完全答對得 6 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 自集合  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  中任選 4 個相異數字，可組成 24 個不同的四位數，已知這 24 個不同的四位數之和為 139986，且其最大數與最小數分別為  $M, n$ ，試求數對  $(M, n)$

$$= ( \underline{78910}, \underline{11121314} ) .$$

參考答案：(9831, 1389)

命題出處：排列與組合

測驗目標：數字和的問題

試題解析：設此四數為  $a, b, c, d$ ，且  $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$$\Rightarrow \text{個位數字和} = (a+b+c+d) \times 3! \times 1$$

$$\text{十位數字和} = (a+b+c+d) \times 3! \times 10$$

$$\text{百位數字和} = (a+b+c+d) \times 3! \times 100$$

$$\text{+) 千位數字和} = (a+b+c+d) \times 3! \times 1000$$

$$\text{和} = (a+b+c+d) \times 3! \times 1111 = 139986 \Rightarrow a+b+c+d = 21,$$

$$\therefore \text{最大值 } M = 9831, \text{ 最小值 } n = 1389 .$$

- B. 公司年終抽獎，共有七個籤筒，籤筒上的號碼為 1、2、3、4、5、6、7。今有二男二女同時抽籤，在四人所選的籤筒均不同的情形下，二女所選的籤筒號碼均比二男所選的籤筒號碼為大之機率 =  $\frac{\textcircled{16}}{\textcircled{15}}$ 。

參考答案： $\frac{1}{6}$

命題出處：機率與統計(I)

測驗目標：機率的性質

試題解析： $n(S) = C_4^7 \times 4!$ ,

$$n(A) = C_4^7 \times 2! \times 2!,$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_4^7 \times 2! \times 2!}{C_4^7 \times 4!} = \frac{1}{6}.$$

- C. 小胖玩賭博遊戲，其規則為：投擲三公正硬幣，若出現三正面，可得 100 元，若出現二正面，可得 50 元，若出現一正面，可得 10 元，而一個正面都沒出現時，賠 200 元。已知玩一次遊戲須先付 5 元，試求小胖玩一次的期望值 =  $\underline{\textcircled{17}}$  元。

參考答案：5

命題出處：機率與統計(I)

測驗目標：期望值的計算

試題解析： $E(X) = [\frac{1}{8} \times 100 + \frac{3}{8} \times 50 + \frac{3}{8} \times 10 + \frac{1}{8} \times (-200)] - 5$   
 $= 5$  (元)。

- D. 設有一數列  $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2009}, \dots \rangle$ ，若已知  $a_1 = -1$ ， $a_2 = -1$ ，且  $|a_n| = a_{n-1} + a_{n+1}$ ，其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ，試問  $a_{2010} = \underline{\textcircled{18}}$ 。

參考答案：2

命題出處：數列與級數

測驗目標：尋找數列的週期性

試題解析：此數列  $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

$$= \langle -1, -1, 2, 3, 1, -2, 1, 3, 2, -1, -1, \dots \rangle,$$

知此數列為週期為 9 的循環性數列，

$$\therefore a_{2010} = a_{2001} = a_{1992} = \dots = a_{9k+3} = 2.$$

E. 設  $\log_4 x + \log_2 y = 5$ ，則  $x + \frac{y}{2}$  之最小值 = 19②0。

參考答案：12

命題出處：不等式

測驗目標：算幾不等式的應用

試題解析： $\log_4 x + \log_2 y = \log_4 x + \log_4 y^2 = \log_4 (xy^2) = 5 \Rightarrow xy^2 = 4^5$ ，

$$\text{由 } x + \frac{y}{2} = x + \frac{y}{4} + \frac{y}{4} \geq 3\sqrt[3]{x\left(\frac{y}{4}\right)\left(\frac{y}{4}\right)} = 3\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4^2}} = 3 \cdot 4 = 12,$$

“=” 成立於  $x = \frac{y}{4} \Rightarrow$  當  $x = 4$ ， $y = 16$  時， $x + \frac{y}{2} = 12$  為最小值。

### 第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本大題共二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、某工廠生產  $A, B, C$  三種機器，其每月生產計劃（如表一）與各型機器所需零件（如表二）如下：

	一月	二月
A 型	5 部	6 部
B 型	3 部	5 部
C 型	2 部	4 部

表一

	A 型	B 型	C 型
甲零件	5 個	4 個	3 個
乙零件	8 個	5 個	3 個
丙零件	3 個	2 個	2 個
丁零件	2 個	1 個	1 個

表二

今甲零件每個價格為 10000 元，乙零件每個價格為 15000 元，丙零件每個價格為 20000 元，丁零件每個價格為 10000 元，試求一、二月份所需之材料費各為多少？（12 分）

參考答案：一月份 1995000 元，二月份 2825000 元

命題出處：矩陣

測驗目標：矩陣的乘法

試題解析：依題意得下列三矩陣  $A, B, C$ ，

$A$ ：零件—價格矩陣： $[10000, 15000, 20000, 10000]$ ，

$B$ ：零件—機型矩陣： $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，



$$C: \text{機型一月份矩陣} : \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{所求} = [x, y] = [10000, 15000, 20000, 10000] \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= [1995000, 2825000],$$

即 1 月份材料費 1995000 元，2 月份材料費 2825000 元。

二、小胖打算建造一長  $x$  公尺，寬  $y$  公尺之花園 ( $x, y$  均為整數)，其比值  $\frac{x}{y}$  介於 2 到 8 之間，

周長在 25 公尺到 35 公尺之間，同時，花園的周邊圍籬，長籬每公尺價格為 260 元，寬籬每公尺價格為 130 元，為使圍籬之造價最少，試問花園的長  $x$  為幾公尺？（14 分）

參考答案：9 公尺

命題出處：不等式

測驗目標：格子點求極值

$$\text{試題解析：列出條件} \begin{cases} x, y \in \mathbf{N} \\ 2 \leq \frac{x}{y} \leq 8 \\ 25 \leq 2(x+y) \leq 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbf{N} \\ 2y \leq x \\ x \leq 8y \\ 13 \leq x+y \leq 17 \end{cases},$$

目標函數： $260x+130y$ ，

可行解為斜線部份中的格子點為

$$(x, y) = (11, 2), (12, 2), (13, 2), (14, 2), (15, 2),$$

$$(10, 3), (11, 3), (12, 3), (13, 3), (14, 3),$$

$$(9, 4), (10, 4), (11, 4), (12, 4), (13, 4),$$

$$(10, 5), (11, 5), (12, 5),$$

代入目標函數  $260x+130y$

$\Rightarrow$  當  $x=9, y=4$  有最小值 2860 元

$\Rightarrow$  此時  $x=9$  (公尺)。

