康熹文化

99 學年度指定科目考試模擬試卷

數學乙考科解答卷

答　案

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)　2. (3)　3. (5)

二、多選題

4. (3)(4)　5. (2)(3)(5)　6. (3)(4)　7. (1)(2)(3)(5)

三、選填題

A. 968　B. -2　C. 12　D. $-\frac{1}{4}$

第貳部分：非選擇題

一. (1) $\frac{5}{16}$；(2) 13950 萬美元

二. (1)第五步驟開始發生錯誤；(2) $\frac{19}{2}$

解　析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 四個子女中有兒子且有女兒的情形有 2^4-2 種，

恰有兩個兒子、兩個女兒的情形有 $\frac{4!}{2!2!}$ 種，故所求機率爲 $\dfrac{\frac{4!}{2!2!}}{2^4-2}=\frac{3}{7}$，選(5)．

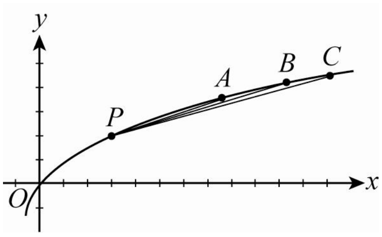
2. 由 $\dfrac{f(x)-2}{x-3}=\dfrac{\log_2(x+1)-\log_2 4}{x-3}=\dfrac{\log_2(x+1)-\log_2(3+1)}{x-3}=\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$，

可知 $k_1=\dfrac{f(a)-2}{a-3}, k_2=\dfrac{f(b)-2}{b-3}, k_3=\dfrac{f(c)-2}{c-3}$

分別表示 $f(x)=\log_2(x+1)$ 之函數圖形上的三點

$A(a\ ,f(a))$、$B(b\ ,f(b))$、$C(c\ ,f(c))$與定點 $P(3, 2)$之連線段的斜率 $m_{\overline{AP}}, m_{\overline{BP}}, m_{\overline{CP}}$，

由下圖及斜率之性質可知 $\dfrac{f(a)-2}{a-3}>\dfrac{f(b)-2}{b-3}>\dfrac{f(c)-2}{c-3}$，即 $k_1>k_2>k_3$，故選(3)．



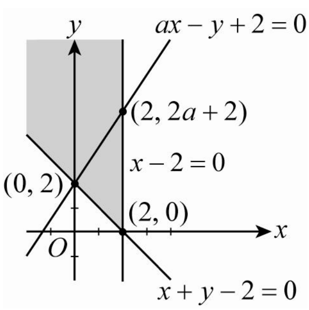
3. 如圖(一)可得陰影區域即為滿足 $x-2\leq 0$ 與 $x+y-2\geq 0$ 的可行解區域，
而 $ax-y+2=0$ 的直線恆過定點(0, 2)，與 $x-2=0$ 交於點(2, 2a + 2)，
由圖可知，當 $2a+2>0$ 時可行解區域為一個封閉的三角形區域，

其面積為 $\dfrac{2\times(2a+2)}{2}=2a+2$，因此

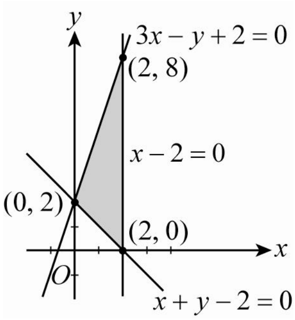
當 $a=-5$ 時，則可行解區域不是一個封閉區域，無法求面積；
當 $a=-2$ 時，則可行解區域不是一個封閉區域，無法求面積；

當 $a=-\dfrac{1}{2}$ 時，面積是 1；

當 $a=2$ 時，面積是 6；
當 $a=3$ 時，面積為 8，如圖(二)，故選(5)．



圖(一)



圖(二)

二、多選題

4. $f(x)=\begin{vmatrix}2-x & -5 & 3\\ -1 & 3-x & -3\\ 3 & 6 & 4-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-x & 4-x & 4-x\\ -1 & 3-x & -3\\ 3 & 6 & 4-x\end{vmatrix}=(4-x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 3-x & -3\\ 3 & 6 & 4-x\end{vmatrix}$

$$=(4-x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 4-x & -2\\ 3 & 3 & 1-x\end{vmatrix}=(4-x)\begin{vmatrix}4-x & -2\\ 3 & 1-x\end{vmatrix}=(4-x)(x^2-5x+10),$$

(1)由餘式定理可知，以 $x-5$ 除 $f(x)$的餘式為 $f(5)=-10$.

(2)(3)方程式 $f(x)=0$ 有一整數根 4 與兩虛根 .

(4)方程式 $f(x)=0$ 的三根和為 9 .

(5)不等式 $f(x)=(4-x)(x^2-5x+10)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x>0$

（因 $x^2-5x+10>0, \forall x\in \boldsymbol{R}$） $\Leftrightarrow \quad x<4$,

故滿足不等式 $f(x)>0$ 的正整數解恰有 3 個 .

故選(3)(4) .

5. (1)設樣本約為 n 人，$\hat{p}=0.64 \;\Rightarrow\; 2\times\sqrt{\dfrac{0.64\times 0.36}{n}}=0.024$

$$\Rightarrow \frac{0.48}{\sqrt{n}}=\frac{0.024}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=40 \;\Rightarrow\; n=1600\text{（人）}.$$

(2) $1600\times 64\%=1024$（人）.

(3) 95%信賴區間為 $0.64\pm 0.024=(0.616, 0.664)$.

(4) 95%的信心水準表示平均每 100 次調查所得的信賴區間中約有 95 次會涵蓋真正購買彩券人數的比例，但不一定仍為 0.64 .

(5) 95%的信心水準改為 99%的信心水準，若抽樣人數不變，則誤差值會變大，即信賴區間會擴大，故想誤差值仍維持正負 2.4 個百分點（誤差值不變），則必須增加抽樣的樣本數才可以 .

故選(2)(3)(5) .

6. $\overline{x}=60$，$\overline{y}=80$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=500$，$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2=2000$，

(1) $r_{xy}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{800}{1000}=0.8$.

(2) $r>0.7$，故為高度相關．

(3) $y=a+bx$，$b=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{8}{5}$，又因迴歸直線過 $(\overline{x},\overline{y})$，

將(60, 80)代入可得 $a=-16$，故 y 對 x 的迴歸直線為 $y=-16+\dfrac{8}{5}x$.

(4)由迴歸直線 $y=a+bx$ 之斜率 $b=r\cdot\dfrac{S_y}{S_x}\Rightarrow\dfrac{8}{5}=0.8\cdot\dfrac{S_y}{S_x}\Rightarrow\dfrac{S_y}{S_x}=\dfrac{2}{1}$，故 $S_x:S_y=1:2$.

（另解）由標準差之定義：

$$S_x:S_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}:\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}{n-1}}=\sqrt{500}:\sqrt{2000}=1:2 .$$

(5)因迴歸直線必過 $(\overline{x},\overline{y})$，又小康與小熹兩人所求之平均相同，故兩直線必有交點

$(\overline{x},\overline{y})$，不可能平行．

故選(3)(4)．

7. A 為二階對稱方陣的充要條件為 $A^T=A$.

(1)因 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，故 $A+B$ 為對稱方陣．

(2)因 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$，故 $A+A^T$ 為對稱方陣．

(3)因 $(A^2)^T=(AA)^T=(A^T)(A^T)=(A^T)^2=A^2$，故 A^2 為對稱方陣．

(4)設 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，則 $AB=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ 不為對稱方陣．

(5)因 $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$，故 AA^T 為對稱方陣．

選(1)(2)(3)(5)．

（另解）設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} p & q \\ q & s \end{bmatrix}$，則

(1) $A+B=\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ b+q & d+s \end{bmatrix}$爲對稱方陣．

(2) $A+A^T=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2d \end{bmatrix}$爲對稱方陣．

(3) $A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bd \\ ab+bd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$爲對稱方陣．

(4)設 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，則 $AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$不爲對稱方陣．

(5) $AA^T=A^2$爲對稱方陣（由(3)可知）.

故選(1)(2)(3)(5)．

三、選填題

A. 所求爲 $C_3^{10}+C_4^{10}+C_5^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}-(C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10})$

$$=2^{10}-(1+10+45)=968$$．

B. 因 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$，可知 $f(0)<0$，

由 $f(-\sqrt{2})\cdot f(0)<0 \Rightarrow f(x)=0$ 在 0 和 $-\sqrt{2}$ 之間至少有一實根，

由 $f(0)\cdot f(\sqrt{2})<0 \Rightarrow f(x)=0$ 在 0 和 $\sqrt{2}$ 之間至少有一實根，

由 $f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{5})<0 \Rightarrow f(x)=0$ 在 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 之間至少有一實根，

又 $f(x)=0$ 的三根皆爲有理數且 $f(x)$爲整係數多項式，有理根即爲整數根，
由上述勘根之討論可得 $f(x)=0$ 之三個整數根分別爲-1、1、2，
故三根之積爲$(-1)\times 1\times 2=-2$．

C. 設 $\log x = a + \alpha$，其中 $0 < \alpha < 1$，

則 $\log\dfrac{100}{x} = 2 - \log x = (2 - a) - \alpha = (1 - a) + (1 - \alpha)$，

其中 $0 < 1 - \alpha < 1$，故 $b = 1 - a$，

此時 $3a^2 - 4b^2 = 3a^2 - 4(1-a)^2 = -a^2 + 8a - 4 = -(a-4)^2 + 12$，

故當 $a = 4$ 時，$3a^2 - 4b^2$ 有最大值 12．

D. 設 $X = UU^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，則 $(UU^T)^2 = X^2 = 3X$，

由 $I_3 = AA^{-1} = (I_3 + X)(I_3 + \alpha X) = I_3 + (\alpha+1)X + \alpha X^2 = I_3 + (4\alpha+1)X$，

可得 $(4\alpha + 1)X = O$（零矩陣），故 $\alpha = -\dfrac{1}{4}$．

第貳部分：非選擇題

一. 所需比賽場數 X 是隨機變數，其所有可能取值為 4、5、6、7，

因此 $P(X = k) = 2 \cdot C_3^{k-1}(\dfrac{1}{2})^k$，其中 $k = 4, 5, 6, 7$，即 X 的機率分佈如下表．

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

(1)該年度總冠軍賽激戰至第七場的機率為 $2 \cdot C_3^6(\dfrac{1}{2})^7 = \dfrac{5}{16}$．（4 分）

(2)所需比賽場數的數學期望值是 $E(X) = 4 \times \dfrac{1}{8} + 5 \times \dfrac{1}{4} + 6 \times \dfrac{5}{16} + 7 \times \dfrac{5}{16} = \dfrac{93}{16}$，（4 分）

因此主辦單位收益的期望值為 $\dfrac{93}{16} \times 2400 = 13950$ 萬美元．（3 分）

二. (1)前四個步驟都未發生錯誤，但第五步驟開始發生錯誤，其原因如下：

當 $2x+3y$ 的最大值爲 $\frac{21}{2}$ 時，③式中 $2x$ 有最大值 6，

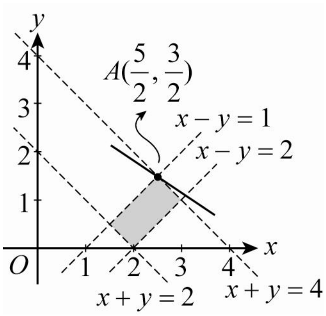
且⑤式中 $3y$ 有最大值 $\frac{9}{2}$，即 $x=3$，且 $y=\frac{3}{2}$，

但此組解代入①式不合．（4 分）

（同學可能會以爲第四步驟開始發生錯誤，事實上，第四步驟並無錯誤，

只是不等式「$2x+3y\le\frac{21}{2}$」中的等號並不成立．）

(2)先作出二元一次聯立不等式 $\begin{cases}2\le x+y\le 4\\1\le x-y\le 2\end{cases}$ 的可行解區域如下圖，（2 分）



設 $2x+3y=k$，此表斜率爲 $-\frac{2}{3}$、y 截距爲 $\frac{k}{3}$ 的動線 L_k，

欲使 k 愈大，即使 y 截距愈大，由線性規劃的理論可知，

當 L_k 通過 $A(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$時，其 y 截距最大，（3 分）故 $2x+3y$ 的最大值爲 $\frac{19}{2}$．（2 分）

（另解）設 $2x+3y=a(x+y)+b(x-y)$，其中 $a, b\in\boldsymbol{R}$，

比較 x, y 的係數可得 $a+b=2,\ a-b=3$，解得$(a, b)=(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$，

將①式乘以 $\frac{5}{2}$ 可得 $5\le\frac{5}{2}(x+y)\le 10$ ……⑥

將②式同乘以 $-\frac{1}{2}$ 可得 $-1\le-\frac{1}{2}(x-y)\le-\frac{1}{2}$ ……⑦

由⑥式+⑦式可得 $4\le 2x+3y\le\frac{19}{2}$，（4 分）

當 $2x+3y=\frac{19}{2}$ 時，$\frac{5}{2}(x+y)=10$，且 $-\frac{1}{2}(x-y)=-\frac{1}{2}$，即 $\begin{cases}x+y=4\\x-y=1\end{cases}$，

解得$(x, y)=(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$，代入①式、②式皆合，故 $2x+3y$ 的最大值爲 $\frac{19}{2}$．

（3 分）

註：若同學由不等式「$4 \le 2x + 3y \le \frac{19}{2}$」就直接下結論：

$2x + 3y$ 的最大值為 $\frac{19}{2}$，則此部份只能給 4 分．