

# 99學年度指定科目考試模擬試卷

## 數學乙考科

### — 作答注意事項 —

考試時間：80分鐘。

考型題數：

- 第壹部分選擇題，共 11 題
- 第貳部分非選擇題，共 2 題

作答方式：

- 請用黑色筆在「答案卷」上作答。

命題老師：鳳山高中／林建伯老師

## 祝考試順利

有著作權，侵害必究

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 78 分）

一、單選題（18 分）

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題有 5 個選項，請選出一個最適合的選項，表示在答案卡之「選擇題答案區」，答對得 6 分；該題未作答或答錯者，以零分計算。

1. 已知康熹老師育有四個子女，曾經聽康熹老師提起他有一個女兒喜歡彈鋼琴，且有一個兒子今年要就讀小學，則康熹老師恰有兩個兒子、兩個女兒的機率為\_\_\_\_\_。

- (1)  $\frac{2}{5}$       (2)  $\frac{1}{2}$       (3)  $\frac{5}{16}$       (4)  $\frac{5}{14}$       (5)  $\frac{3}{7}$  .

2. 設  $f(x) = \log_2(x+1)$ ，且  $3 < a < b < c$ ，若  $k_1 = \frac{f(a)-2}{a-3}$ ， $k_2 = \frac{f(b)-2}{b-3}$ ， $k_3 = \frac{f(c)-2}{c-3}$ ，則  $k_1, k_2, k_3$

三數之大小關係為\_\_\_\_\_。

- (1)  $k_1 < k_2 < k_3$       (2)  $k_2 < k_3 < k_1$       (3)  $k_3 < k_2 < k_1$       (4)  $k_2 < k_1 < k_3$       (5)  $k_3 < k_1 < k_2$  .

3. 在平面直角坐標系中，若不等式組  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \\ ax - y + 2 \geq 0 \end{cases}$  所表示的平面區域之面積等於 8，則實數

$a$  的值為\_\_\_\_\_。

- (1) -5      (2) -2      (3)  $-\frac{1}{2}$       (4) 2      (5) 3 .

## 二、多選題（32 分）

說明：第 4 至 7 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。請選出正確選項，標示在答案卡之「選擇題答案區」。每題 8 分，所有選項均答對者，可得 8 分。若答錯 1 個選項，可得 4.8 分；若答錯 2 個選項，可得 1.6 分。若所有選項均未作答或答錯多於 3 個選項，該題以零分計算。

4. 設函數  $f(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -5 & 3 \\ -1 & 3-x & -3 \\ 3 & 6 & 4-x \end{vmatrix}$ ，則下列各敘述何者正確？

- (1) 以  $x - 5$  除  $f(x)$  的餘式為 10
- (2) 方程式  $f(x) = 0$  有三個實根
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  有正整數根
- (4) 方程式  $f(x) = 0$  的三根和為 9
- (5) 滿足不等式  $f(x) > 0$  的正整數解恰有 4 個。

5. 台彩公司在民國 100 年的春節提供的大樂透百萬加碼活動以刺激買氣，且由於大樂透連九槓，在 2 月 8 日開獎的頭彩獎金上看 18 億，造成全民瘋狂，最後有 5 人平分頭彩獎金。台彩公司事後委託民調公司調查宣稱：「在 95% 的信心水準下，約有 64% 的台灣地區民眾曾購買 2 月 8 日開獎的大樂透彩券，且其誤差在正負 2.4 個百分點之內。」，則下列各敘述何者正確？

- (1) 民調公司這次調查的樣本約有 1200 人
- (2) 這次調查的樣本中曾購買大樂透彩券的人約有 1024 人
- (3) 這次民調在 95% 的信心水準下，曾購買大樂透彩券的民眾比例約在 (0.616, 0.664)
- (4) 若如果重複做相同的民調，則平均每 100 次中會有 95 次購買大樂透彩券的民眾比例為 0.64
- (5) 若台彩想將民調改為在 99% 的信心水準下，且希望其誤差值仍維持正負 2.4 個百分點，則民調公司比較有效的作法是增加調查的樣本數。

6. 小康為研究兩個變量間的相關性，取一組數據資料共 10 筆  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ ，若已知  $\bar{x} = 60$ ,  $\bar{y} = 80$ ,  $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 800$ ,  $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 500$ ,  $\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 2000$ ，設  $x$  與  $y$  的相關係數為  $r$ ，兩筆資料的標準差  $S_x$  與  $S_y$ ， $y$  對  $x$  的迴歸直線(最佳直線)為  $L$ ，則下列各敘述何者正確？

- (1)  $0.6 \leq r \leq 0.7$
- (2) 兩筆資料之相關係為中度相關
- (3)  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y = -16 + \frac{8}{5}x$
- (4) 兩筆資料的標準差  $S_x$  與  $S_y$  之比為  $S_x : S_y = 1 : 2$
- (5) 若小熹也對相同的兩個變量，取一組數據資料共 15 筆  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ ，且所求得數據資料的平均數與小康均相同，則小熹所求出  $y$  對  $x$  的迴歸直線與  $L$  平行。

7. 設二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若  $b = c$  則稱  $A$  為二階對稱方陣，且  $A^T$  表示矩陣  $A$  的轉置矩陣。

已知  $A$ 、 $B$  皆為二階對稱方陣，則下列選項中的矩陣何者亦為二階對稱方陣？

- (1)  $A + B$     (2)  $A + A^T$     (3)  $A^2$     (4)  $AB$     (5)  $AA^T$  .

### 三、選填題（28 分）

說明：A 至 D 各題為選填題，填寫在答案卷上所標示的列號（8-17）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 從一架鋼琴挑出的十個音鍵中，分別選擇 3 個、4 個、5 個、…或 10 個鍵同時按下，皆可發出和絃，若其中有任何一個音鍵不同，所發出的和絃就不同，則共可發出 ⑧⑨⑩ 種不同的和絃。

B. 設  $a, b, c$  皆為整數，且函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ ，已知方程式  $f(x) = 0$  的三根皆為有理數，若  $f(-\sqrt{2}) > 0$ 、 $f(\sqrt{2}) > 0$ 、 $f(\sqrt{5}) < 0$ ，則方程式  $f(x) = 0$  的三根之積為 ⑪⑫。

C. 設  $x$  為正數，且設  $\log x$ 、 $\log \frac{100}{x}$  的首數分別是  $a$  和  $b$ ，若  $\log x$ 、 $\log \frac{100}{x}$  的尾數都不為 0，則  $3a^2 - 4b^2$  的最大值為 ⑬⑭。

D. 設  $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，且設  $A = I_3 + U \times U^T$ ，若  $A^{-1} = I_3 + \alpha U \times U^T$ ，其中  $\alpha$  為一實數，則  $\alpha = \frac{\textcircled{15} \textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

說明：本大題共二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、美國職業籃球 *NBA* 總決賽採用 7 戰 4 勝制，即若某隊先取得 4 場的勝利，則比賽結束。根據非官方的統計，任兩隊在每一場決賽中取勝的機率相等，且主辦一場決賽，主辦單位有機會透過出售電視轉播權、門票、廣告費及週邊零售商品等收入中獲取的收益達 2400 萬美元，

(1) 試求該年度總冠軍賽激戰至第七場的機率？（4 分）

(2) 試預估該年度主辦單位在總決賽中收益的期望值為多少萬美元？（7 分）

二、康熹老師出了一道數學試題如下：

$$\text{設 } x, y \in \mathbf{R}, \text{ 且滿足 } \begin{cases} 2 \leq x + y \leq 4 \dots\dots \textcircled{1} \\ 1 \leq x - y \leq 2 \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}, \text{ 求 } 2x + 3y \text{ 的最大值。}$$

小安的解題過程如下：

〔解〕第一步驟：將①式+②式可得  $3 \leq 2x \leq 6 \dots\dots \textcircled{3}$

第二步驟：將②式左右同乘以(-1)可得  $-2 \leq y - x \leq -1 \dots\dots \textcircled{4}$

第三步驟：將①式+④式可得  $0 \leq 2y \leq 3$ ，左右同乘以  $\frac{3}{2}$  可得  $0 \leq 3y \leq \frac{9}{2} \dots\dots \textcircled{5}$

第四步驟：將③式+⑤式可得  $3 \leq 2x + 3y \leq \frac{21}{2}$ 。

第五步驟：由第四步驟可知  $2x + 3y$  的最大值為  $\frac{21}{2}$ 。

(1)但康熹老師說，小安的解法是錯誤的，試說明小安的解法在哪一個步驟開始發生錯誤？（必須詳細說明錯誤的原因）（4分）

(2)試解出原試題的正確答案（7分）