

高雄區高級中學九十九學年度第二學期
大學入學指定科目考試第一次聯合模擬考

數學甲

試題編號：CU-3996
考試日期：100.04.07

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 2 題，選填題第 A 至 D 題共 4 題，非選擇題共二大題

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

- (一) 單選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子；多選題只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第一列 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- (二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而答案是 $\frac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案卡的

第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的

第 20 列的 \square 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利

5. 設丟擲某硬幣 n 次機率的分配為二項分配，若出現反面次數的期望值 320 次，標準差為 16，則丟擲該硬幣三次出現正面次數至少兩次的機率為何？

- (1) $\frac{113}{125}$ (2) $\frac{112}{125}$ (3) $\frac{81}{125}$
(4) $\frac{44}{125}$ (5) $\frac{13}{125}$

二、多選題 (16分)

說明：第 6 至 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「選擇題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；所有選項均未作答或答錯多於 1 個選項者，該題以零分計算。

6. 空間中有三點 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(2, 4, 7)$ 、 $C(3, 1, 5)$ ，則下列敘述何者為真？

- (1) $\triangle ABC$ 的面積為 $5\sqrt{5}$
(2) 點 $(3, 1, 1)$ 到 $\triangle ABC$ 所決定平面的距離為 $\frac{4}{\sqrt{5}}$
(3) 包含 A, B, C 的最小球半徑為 $\frac{21}{50}\sqrt{30}$
(4) 若 O 為原點，則 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{OC} 所圍成的平行六面體體積為 5

7. 在直角坐標平面上，考慮多項式函數 $y=f(x)=(x-1)^2(x-2)^2$ ，設 $f'(x)$ 表 $f(x)$ 的導函數，下列各敘述何者是正確的？

- (1) $f(x)$ 有極大值 $\frac{1}{16}$
(2) $y=f'(x)$ 的圖形本身會對稱於一點 $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$
(3) $y=f(x)$ 的圖形在 $x=1.1$ 處之切線斜率會大於在 $x=2.1$ 處之切線斜率
(4) 令函數 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ ，則 $g(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 處的導數 $g'(\frac{3}{2})=-16$

三、選填題 (28 分)

說明：A 至 D 題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (Ⓔ~Ⓖ) 內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設甲，乙，丙三村的距離分別為 5 公里，7 公里和 8 公里。今欲挖一口井使得井到三個村的距離均相等，則該距離為 $\frac{\textcircled{8}}{\sqrt{\textcircled{9}}}$ 。

B. 令 $i = \sqrt{-1}$ ，設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \\ a_{n+1} = w \cdot a_n \end{cases}$ ，其中 n 為正整數， $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ ，若 $a_{33} = p + q \cdot i$ (p, q 為定實數)，則 $p = \frac{\textcircled{10}\textcircled{11}}{\textcircled{12}}$ 。(化成最簡分數)

C. 大戶阿仁爲了怕他的提款卡號碼被他人知道，所以想到利用矩陣的運算來隱藏號碼：

方法是他找了一個矩陣的每一列數字和之個位數字來作爲他的號碼。例如： $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 8 \\ 1 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

表示密碼爲 7549，今爲了隱密找了一個二階矩陣 $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，再將 A 乘上 X 得到另一個

矩陣 B ，亦即 $B = AX = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 22 & 37 \\ 5 & 9 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$ ，並將 B 記在帳本上。若阿仁今年帳本上的矩陣

$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 17 \\ 15 & 25 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$ ，則他的提款卡號碼爲 $\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}$ 。

D. 直角坐標平面上有三個兩兩互相外切的圓 C_1, C_2, C_3 ，其圓心分別爲 O_1, O_2, O_3 ，其半徑分別爲 $\sqrt{3}, x, y$ ，且 $x > y$ ，設 $\angle O_3 O_1 O_2 = 60^\circ$ ，若 $\triangle O_1 O_2 O_3$ 的外接圓半徑長爲 6，則 $x = \textcircled{17}\sqrt{3} + \textcircled{18}\sqrt{5}$ 。

第貳部分：非選擇題（26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)、⋯），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、阿亮在馬魚夜市有個 150 坪的店面，並想把它規劃成 A 、 B 兩種規格的隔間作攤位出租。 A 、 B 兩種規格各佔 9 坪與 12 坪，其隔間費用各為 15000 元和 12000 元。今阿亮最多只能拿出 21 萬做為隔間費用且預計兩種規格的租金分別為 6000 元和 5000 元，若 A 種規格有 x 間， B 種規格有 y 間，則：

- (1) 滿足上述條件的不等式組為何？（3 分）
- (2) 月租金的目標函數為何？（3 分）
- (3) 滿足月租金有最大時之數對 (x, y) 為何？此時最大租金為何？（7 分）

二、 m 、 h 為定實數，將拋物線 $\Gamma_1: (x-h)^2=4(y-mh)$ 沿直線 $L: y=mx$ 平移後得另一拋物線 Γ_2 ，已知 Γ_1 、 Γ_2 有一交點為 $A(5, 3)$ ， Γ_1 在 A 點的切線斜率為 m_1 、在 A 點的切線斜率為 m_2 ，且 $m_1+m_2=1$ ，則：

- (1) 若 $m_1=a \cdot h+b$ (a 、 b 為定有理數)，求數對 $(a, b)=?$ （4 分）
- (2) 求值： $m_1 \times m_2=?$ （9 分）

高雄區高級中學九十九學年度第二學期 大學入學指定科目考試第一次聯合模擬考 數學甲詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(2)

試題解析： $\frac{4^3 - 3^3}{4^3} = \frac{37}{64} = 0.578\cdots \approx 0.58$

2. 參考答案：(3)

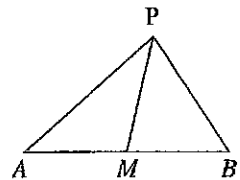
試題解析： $\log 20^{24} = 24 \log 20 = 24(\log 2 + \log 10) = 24(0.3010 + 1) = 31.224 = 31 + 0.224$
 $\therefore 20^{24}$ 為 32 位數

3. 參考答案：(3)

試題解析： $L_M: \frac{x}{2} - \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$, $L_Z: \frac{x-7}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$
 則包含 L_M 且和 L_Z 平行之平面 E 方程式為 $x + 2y + 2z = 0$
 \therefore 最短距離為 $\frac{7+2+6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 5$

4. 參考答案：(5)

試題解析： \overline{AB} 中點為 $M(4, -4, 4)$, S 球心 $O(1, 2, -2)$, 半徑 $R=3$
 \therefore 由 \triangle 中線定理： $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2) = 2(91 + \overline{MP}^2)$
 當 P 為 \overline{OM} 與 S 交點時，
 所求 $\overline{MP} \min = \overline{MO} - R = 9 - 3 = 6$
 $\therefore m = 2(91 + 6^2) = 254$



5. 參考答案：(2)

試題解析：設出現反面的機率為 P
 則 $nP = 320$, $\sqrt{nP(1-P)} = 16$
 $1 - P = \frac{16^2}{320} = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$
 所求 $= C_3^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 + C_2^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{5} = \frac{112}{125}$

二、多選題

6. 參考答案：(2)(3)(4)

試題解析：(1) $\overline{AB} = (1, 2, 4)$, $\overline{AC} = (2, -1, 2)$
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{(1^2+2^2+4^2)[2^2+(-1)^2+2^2] - (2-2+8)^2}$
 $= \frac{5}{2} \sqrt{5}$

(2) $\triangle ABC$ 之平面方程式為 $8x + 6y - 5z - 5 = 0$

$$\therefore \text{距離} = \frac{|24 + 6 - 5 - 5|}{\sqrt{8^2 + 6^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{125}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

(3) $\therefore \overline{AB} = \sqrt{21}, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = \sqrt{14}$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 爲銳角 } \triangle, \cos \angle ABC = \frac{8}{\sqrt{21} \cdot 3}, \sin \angle ABC = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}{3\sqrt{21}} = 2R \Rightarrow R = \frac{21}{50} \sqrt{30}$$

$$(4) V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \quad \therefore \text{選(2)(3)(4)}$$

7. 參考答案：(1)(4)

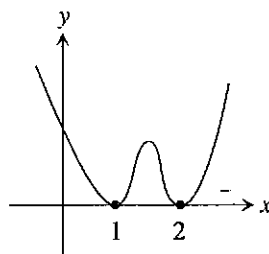
試題解析： $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x-2)^2 + (x-1)^2 \cdot 2(x-2) \\ &= 2(x-1)(x-2)[(x-2) + (x-1)] \\ &= 2(x-1)(x-2)(2x-3) \end{aligned}$$

而 $f''(x) = 2(6x^2 - 18x + 13)$

$$f'''(x) = 24(x - \frac{3}{2})$$

(1)	x	1	$\frac{3}{2}$	2	
	$f'(x)$	-	+	-	+
	$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow



$$f(x) \text{ 有極大值 } f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{16}$$

(2) $y = f'(x)$ 爲三次函數，其反曲點爲 $(\frac{3}{2}, f'(\frac{3}{2}))$

$\therefore y = f'(x)$ 的圖形本身會對稱於點 $(\frac{3}{2}, f'(\frac{3}{2}))$

$$(3) f'(1.1) = 2(0.1)(-0.9)(-0.8) = 0.144$$

$$f'(2.1) = 2(1.1)(0.1)(1.2) = 0.264$$

$\therefore y = f(x)$ 在 $x = 1.1$ 之切線斜率小於在 $x = 2.1$ 之切線斜率

$$\begin{aligned} (4) g'(\frac{3}{2}) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{g(x) - g(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{f'(x) - 0}{x - \frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2(x-1)(x-2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4}{(x-1)(x-2)} = -16 \end{aligned}$$

三、選填題

A. 參考答案： $\frac{7}{\sqrt{3}}$ (⑧ 7 ⑨ 3)

試題解析：設距離為 d ，則 $\sqrt{10 \times 5 \times 3 \times 2} = \frac{5 \times 7 \times 8}{4d} \Rightarrow 40\sqrt{3}d = 280$

$$\Rightarrow d = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

B. 參考答案： $-\frac{1}{2}$ (⑩ - ⑪ 1 ⑫ 2)

試題解析： $\langle a_n \rangle$ 成等比，首項 $a_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$$\text{公比 } w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{33} &= a_1 \cdot w^{32} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{32} \\ &= \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{33} = \frac{1}{2}(\cos 11\pi + i \sin 11\pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

C. 參考答案：1803 (⑬ 1 ⑭ 8 ⑮ 0 ⑯ 3)

試題解析： $A \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 17 \\ 15 & 25 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$

$$\text{則 } A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 17 \\ 15 & 25 \\ 9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \\ 5 & 5 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$$

\therefore 提款卡號碼為 1803

D. 參考答案： $3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ (⑰ 3 ⑱ 2)

試題解析： $\triangle O_1 O_2 O_3$ 中由餘弦定理：

$$(x+y)^2 = (x+\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 - 2(x+\sqrt{3})(y+\sqrt{3})\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 3xy = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}xy = x + y + \sqrt{3} \dots\dots ①$$

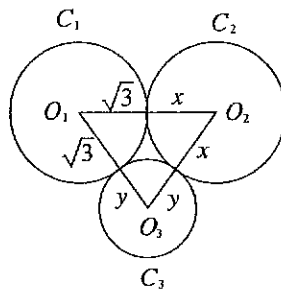
再由正弦定理：

$$\frac{\overline{O_2 O_3}}{\sin \angle O_3 O_1 O_2} = 2R \Rightarrow \frac{x+y}{\sin 60^\circ} = 2 \times 6 \Rightarrow x+y = 6\sqrt{3} \dots\dots ②$$

$$\text{②式代入①式得：}\sqrt{3}xy = 6\sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow xy = 7 \dots\dots ③$$

$$\text{由②式：}y = 6\sqrt{3} - x \text{ 代入③式得 } x(6\sqrt{3} - x) = 7 \Rightarrow x = 3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{5}$$

$$\because x > y, \therefore x = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$



第貳部分：非選擇題

一、參考答案：(1)
$$\begin{cases} 3x+4y \leq 50 \\ 5x+4y \leq 70 \\ x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

(2) $6000x + 5000y$

(3) 當 $(x, y) = (10, 5)$ 時，最大租金 85000 元

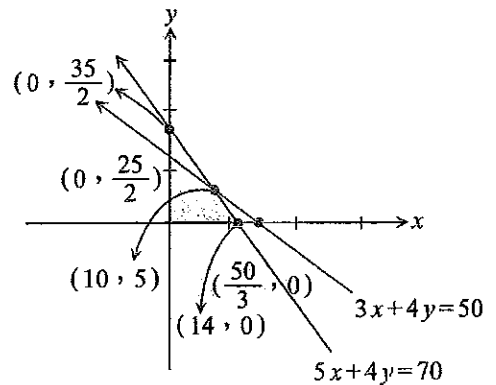
試題解析：(1)
$$\begin{cases} 9x+12y \leq 150 \\ 15000x+12000y \leq 210000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y \leq 50 \\ 5x+4y \leq 70 \\ x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

(2) $P(x) = 6000x + 5000y$

(3) 當 $x = 10, y = 5$

有最大租金 $P(10, 5) = 85000$ 元



二、參考答案：(1) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (2) $-\frac{1}{2}$

試題解析：(1) $\Gamma_1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x-h)^2 + mh \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(x-h)$

$$\therefore m_1 = y'|_{x=5} = -\frac{1}{2}h + \frac{5}{2}$$

(2) $\because \Gamma_1$ 的頂點 (h, mh) 沿 L 平移至 Γ_2 的頂點，設其為 (k, mk)

$$\therefore \Gamma_2 \text{ 為 } (x-k)^2 = 4(y-mk)$$

A 代入 Γ_1, Γ_2 得
$$\begin{cases} (5-h)^2 = 4(3-mh) \\ (5-k)^2 = 4(3-mk) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 + (4m-10)h + 13 = 0 \\ k^2 + (4m-10)k + 13 = 0 \end{cases}$$

$\therefore h, k$ 為方程式 $x^2 + (4m-10)x + 13 = 0$ 之二根

$$\Rightarrow \begin{cases} h+k = 10-4m \\ hk = 13 \end{cases}$$

又
$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2}(5-h) \\ m_2 = \frac{1}{2}(5-k) \end{cases}, \text{ 故 } m_1 + m_2 = \frac{10 - (h+k)}{2} = 1 \Rightarrow h+k=8$$

$$\therefore 10 - 4m = 8 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = \frac{5-h}{2} \times \frac{5-k}{2} = \frac{25 - 5(h+k) + hk}{4} = \frac{25 - 5 \times 8 + 13}{4} = -\frac{1}{2}$$