

# 高雄中學九十九學年度

## 第四次模擬考試試題

### 數學甲

#### —作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

- (一) 單選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子；多選題只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 -, ± 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列  $\square_3$  劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	$\square_1$	$\square_2$	$\blacksquare_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$

例：若第 6 題為多選題，而考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 6 列的  $\square_1$  與  $\square_3$  劃記，如：

6	$\blacksquare_1$	$\square_2$	$\blacksquare_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$
---	------------------	-------------	------------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	---------------	-----------------

- (二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考

生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\square_{-}$  與第 21 列的  $\square_7$  劃記，如：

20	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\blacksquare_{-}$	$\square_{\pm}$
21	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\blacksquare_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共佔 74 分）

一、單選題（30 分）

說明：第 1 至 5 題為單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的選項，選出最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，未作答、答錯或劃記多於一個選項者該題以零分計算。

1. 設  $a = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{2}$ 、 $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 、 $c = (\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之大小順序為：

(1)  $a > b > c$

(2)  $b > c > a$

(3)  $c > a > b$

(4)  $c > b > a$

(5)  $b > a > c$

2. 百貨公司舉辦抽獎活動，提供名額 500 人參加抽獎，每人限參加一次，活動方式為丟擲一枚正六面體之公正骰子，骰子各面分別標示 1, 2, 3, 4, 5, 6 等數字，當參加者擲出偶數數字時，即可獲得與數字相同之獎金，若參加者投擲出奇數數字時，則須重新投擲一次，但僅限重擲一次（即若參加者第二次再擲出奇數數字時，就無法獲得任何獎金）。就數學期望值之觀點來看，百貨公司應準備獎金多少？

(1) 1000

(2) 1500

(3) 1750

(4) 2000

(5) 2250

3. 在三角形  $ABC$  中，已知  $\overline{AB} = 6$ 、 $\cos(\angle ABC) = \frac{3}{5}$ ，且其外接圓半徑為 5，則三角形  $ABC$  之面積為：

- (1) 24
- (2) 12
- (3) 48
- (4)  $\frac{54}{5}$
- (5)  $\frac{18}{5}$

4. 假設矩陣  $M = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$  經過多次的列運算後，得到另一個矩陣

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & t \end{bmatrix}$ ，令矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & t \end{bmatrix}$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $t$  均為實數且行列式  $\det(A) = 2$ ，則行列式  $\det(A - B) =$

- (1) 0
- (2) 3
- (3)  $\frac{3}{2}$
- (4)  $\frac{9}{2}$
- (5)  $\frac{9}{4}$

5. 有一實係數多項函數  $y=f(x)$ ，若已知其圖形通過  $A(1,3)$  及  $B(2,6)$  兩點，且在

$A$ 、 $B$  兩點上之切線斜率分別為 1、7，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - 2f(1+2h)}{h} =$

- (1) 8
- (2) 5
- (3) 3
- (4) -9
- (5) -11

## 二、多選題 (16 分)

說明：第 6 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分，每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分，在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分；倒扣到該題之實得分數為零分為止。整題未作答者，該題以零分計算。

6. 若  $a$ 、 $b$  為相異正實數，則下列選項何者恆真？

- (1)  $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
- (2)  $\sqrt{a+b} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$
- (3)  $\log_2 \sqrt{ab} > \sqrt{\log_2 a \times \log_2 b}$
- (4)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{a+b}{2} > \frac{\log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} b}{2}$



7. 設  $a_n$  為函數  $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$  在  $x$  為任意實數時的最大值。試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $a_1 = 1$

(2)  $a_3 = 1$

(3)  $a_4 = 1$

(4) 若  $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$ ，則  $g(x)$  之最大值為  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

### 三、選填題（28分）

說明：A 至 D 題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8-20）內。每一題完全答對得7分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 為預防新型流感，醫師建議每人每天必須攝取至少 80 單位的營養素 A、至少 50 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C。而這三種營養素可分別由甲、乙兩種健康食品中獲得，且知健康食品甲每顆售價 7 元並含有 5 單位的營養素 A，2 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；健康食品乙每顆售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，5 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。若想僅由甲、乙兩種健康食品中攝取足夠的營養素，則每日最少須花費 8 9 10 元。

B. 根據過去統計資料顯示，台灣患有某種疾病者佔 1%，現有一新型檢測儀器用來檢測該疾病，於上市前進行抽樣測試儀器效果，抽樣結果發現，實際上患該疾病之患者經檢測後顯示患病之比率佔 95%，而實際上不患該疾病者經檢測後卻顯示患病之比率佔 10%，則該檢測儀器檢驗之正確率為 ⑪⑫⑬⑭ %。

C. 已知三角形  $ABC$  中， $\angle ACB = 120^\circ$ 、 $\overline{CB} = 5$ 、 $\overline{CA} = 2$ ，若  $P$ 、 $Q$  為  $\overline{AB}$  上兩點，且  $P$ 、 $Q$  將  $\overline{AB}$  三等分，則  $\cos(\angle PCQ) = \frac{\textcircled{15}\textcircled{16}}{\textcircled{17}\textcircled{18}}$ 。

D. 若函數  $y = x^3$  的圖形與直線  $mx + y = 0$  所圍成的有界區域面積為 18，則  $m = \frac{\textcircled{19}\textcircled{20}}$ 。

——— 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 ———

第貳部分：非選擇題（佔26分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。各小題配分標於題末。

一、（14分）已知空間中三平面  $E_1: 2x + 3y - z = 1$ 、 $E_2: 2x + y + z = b$ 、 $E_3: x + 4y + az = 3$  及一球面  $C: x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 11 = 0$ ，若  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$  三平面交於一直線  $L$ ，則：

(1)  $(a, b) = ?$  (6分)

(2) 設直線  $L$  與球面  $C$  交於  $A$ 、 $B$  兩點，試求出  $\overline{AB}$  之長度？ (6分)

(3) 若平面  $F$  包含直線  $L$ ，且與球面  $C$  交於一圓，則此圓面積最小為？ (2分)

二、（12分）已知實係數多項函數  $f(x)$  滿足  $f''(x) = 12x - 6$ ，且  $y = f(x)$  在  $x = 1$  有局

部極值 0：

(1) 試求  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 。(7分)

(2) 若  $\int_t^t [f(x-a) + b] dx = 0$ ，對任意實數  $t$  均成立，則  $(a, b) = ?$  (5分)