臺北區公立高中九十九學年度第二學期指定科目第二次聯合模擬考試

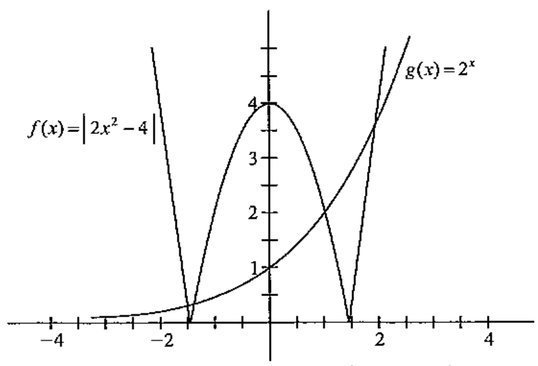
數學乙考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	4	1345	1	0	9	1	0	2	4	6	2	5
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
−	3	−	1	7	2	7	0	1	7	8		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 如下圖



因為 $g(x)=2^x$ 最後會比 $f(x)=\left|2x^2-4\right|$ 值還大，所以除了圖上 4 個交點以外，還有 1 個交點，所以總共 5 個交點，故 5 個實數解

2. 令 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+k)+3$

$f(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4+k)+3=9$，$\therefore k=-3$

$f(5)=(5-1)(5-2)(5-3)(5-3)+3=51$

二、多選題

3. $a_2=1$，$a_3=\dfrac{5}{9}$，$a_4=\dfrac{5}{17}$，$a_5=\dfrac{5}{33}$，$a_6=\dfrac{5}{65}=\dfrac{1}{13}>\dfrac{1}{15}$

$a_{100}=\dfrac{5a_{99}}{10-a_{99}}>\dfrac{1}{2}a_{99}>\dfrac{1}{2^{99}}a_1=\dfrac{1}{2^{99}}\cdot\dfrac{5}{3}>\dfrac{1}{2^{100}}\cdot\dfrac{9}{3}$

$\therefore 2^{100}a_{100}>3$，故選(1)(3)(4)(5)

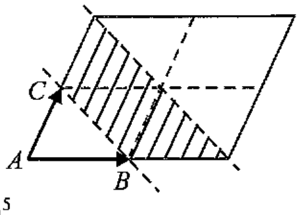
三、選填題

A. 令 $\vec{b}=(x,y)$，則 $x\geq 0$ 、 $y\geq 0$，起點 $(0,0)$，終點在圓 $x^2+y^2=1$ 上，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 最大值 $=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=10\times 1=10$

B. 斜線面積 $=\dfrac{3}{2}\Delta ABC$

$=\dfrac{3}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right|=\dfrac{3}{2}\times 6=9$

$\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,4)$



C. 一艘船為空船的機率為 $(\dfrac{4}{5})^5$

則一艘船的空船數量期望值

$E_1=1\times(\dfrac{4}{5})^5+0\times[1-(\dfrac{4}{5})^5]=(\dfrac{4}{5})^5$

$\Rightarrow$ 5 艘船的空船個數期望值

$E_5=5\times E_1=5\times(\dfrac{4}{5})^5=\dfrac{1024}{625}$

D. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=a^2$

$x^2+2xy+y^2=a^2$ 且 $x^2-xy+y^2=a$

則 $xy=\dfrac{a^2-a}{3}$

$\dfrac{1-x^2}{y}+\dfrac{1-y^2}{x}=\dfrac{x-x^3+y-y^3}{xy}=\dfrac{a-a^2}{\dfrac{a^2-a}{3}}=-3$

E. $\cos\angle BAC=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\dfrac{-1}{2}$，$\therefore\angle BAC=120°$

$\therefore\Delta CAE\sim\Delta CBA$，$\therefore\overline{CA}:\overline{AE}:\overline{EC}=7:3:5$

$\Rightarrow\overline{CA}:\overline{AD}:\overline{DE}=7:3:8$

$\therefore\cos\angle CAD=\dfrac{7^2+3^2-8^2}{2\cdot 7\cdot 3}=\dfrac{-1}{7}$

F. 設 a、$b\in N$，$a\neq b$，由 $2\mid(a+b)\Rightarrow 2\mid(a-b)$

又 $3\mid(a-b)\Rightarrow 6\mid(a-b)$，考慮 1~60 之一分割

$A_i=\{6k+i\mid k=0,1,\cdots,9\}$，$i=1,2,3,4,5,6$

若 a、b 滿足所求，則同屬某一集合 A_i

即共有 $C_1^6\times C_2^{10}=270$ 種取法

G. 由原式移項整理得

$(x^2-20x+5)(2x-5)(2x-11)<0$

其解集合為 $10-\sqrt{95}<x<\dfrac{5}{2}$ 或 $\dfrac{11}{2}<x<10+\sqrt{95}$

故所有整數解之和 $=1+2+6+7+\cdots+19$

$=\dfrac{19(19+1)}{2}-(3+4+5)=178$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{bmatrix}\dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}$；(2) $a_{2011}=3$ 、 $b_{2011}=2$；(3) 13%

(1) $a_1=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}(b+\dfrac{1}{3}a)=\dfrac{7}{9}a+\dfrac{1}{3}b$

$b_1=\dfrac{2}{3}(b+\dfrac{1}{3}a)=\dfrac{2}{9}a+\dfrac{2}{3}b$

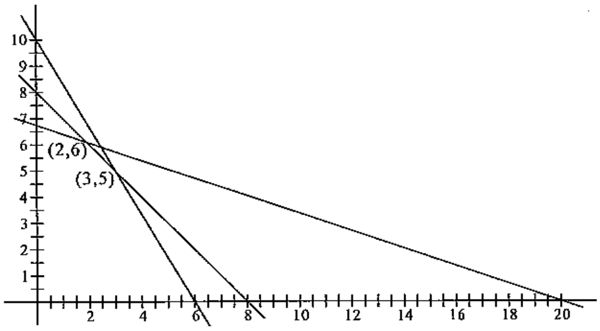
$\because\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{2011} = 3$ 、 $b_{2011} = 2$

(3) $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{81} & \frac{13}{27} \\ \frac{26}{81} & \frac{14}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{81}a + \frac{13}{27}b \\ \frac{26}{81}a + \frac{14}{27}b \end{bmatrix}$

故乙瓶濃度爲 $\dfrac{\frac{26}{81} \times 3 \times 27\% + \frac{14}{27} \times 2 \times 0\%}{2} = 13\%$

二、(1) $\begin{cases} x \geq 0 \text{，} y \geq 0 \\ 5x + 5y \leq 40 \\ 5x + 3y \leq 30 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$



(2) 甲玩具生產 3 個，乙玩具生產 5 個

(3) 最大利潤爲 8600 元