

# 臺北區公立高中九十九學年度第二學期 指定科目第二次聯合模擬考試

## 數學乙

### — 作答注意事項 —

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一)選擇題：單選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 —, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子；多選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 —, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為 (1)3(2)5(3)7(4)9(5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	—	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，正確選項為 (1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 1 與 3 劃記，如：

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	—	±	
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(二)選填題的題號是 A, B, C……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{(20)(21)}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 — 與第 21 列的 7 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	—	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	—	±	
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 76 分)

一、單選題(12 分)

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。  
每題答對得 6 分，答錯不倒扣。

1. 請問  $|2x^2 - 4| = 2^x$  有幾個實數解？

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 5

2. 設實係數多項式  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，且  $f(x)$  除以  $(x-1)$ 、 $(x-2)$ 、 $(x-3)$  皆餘 3；若  $f(4) = 9$ ，  
則  $f(5) = ?$

- (1) 81
- (2) 71
- (3) 61
- (4) 51
- (5) 41

## 二、多選題(8分)

說明：第3題為多選題，每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的，請選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，所有選項均答對者，該題得8分。若答錯 $k$ 個選項，可得 $\frac{5-2k}{5}$ 題分。例如答錯1個選項者，得該題 $\frac{3}{5}$ 題分；答錯兩個選項者，得該題 $\frac{1}{5}$ 題分，以此類推；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

3. 有一正項數列 $\{a_n\}$ ，滿足關係式 $a_{n+1} = \frac{5a_n}{10-a_n} (n \geq 1)$ ， $a_1 = \frac{5}{3}$ ，則下列哪些選項正確？

- (1)  $a_2 = 1$
- (2)  $a_3 = \frac{5}{8}$
- (3)  $a_4 = \frac{5}{17}$
- (4)  $a_6 > \frac{1}{15}$
- (5)  $2^{100} a_{100} > 3$

## 三、選填題(56分)

說明：A至G各題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(4~24內)。每一題完全答對得8分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.  $\vec{a} = (6, 8)$ ， $\vec{b} = (\sqrt{1-\sin\theta}, \sqrt{\sin\theta})$ ， $\theta$ 實數，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 最大值？ ④⑤

B.  $A(1,1)$ 、 $B(2,2)$ 、 $C(-1,5)$ ，若  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ， $1 \leq x+y \leq 2$ ， $x, y \geq 0$ ，則  $P$  點所形成區域面積？

⑥

C. 今天有 5 個人來到碼頭要坐船渡河，而碼頭處停有 5 艘船可供搭乘，每個人從 5 艘中任意選擇其中一艘搭乘。則無人搭乘的空船數量的期望值為  $\frac{\textcircled{7}\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{10}}{\textcircled{11}\textcircled{12}\textcircled{13}}$  艘船。

D. 若  $x, y \in R$ ， $x+y=x^2-xy+y^2=a$  且  $a \neq 0, 1$ ，求： $\frac{1-x^2}{y} + \frac{1-y^2}{x} = ?$  ⑭⑮

E. 有一  $\triangle ABC$ ， $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{BC}=7$ 、 $\overline{AC}=5$ ，今在  $\overline{BC}$  上取二點  $D$ 、 $E$ ，使得  $\triangle ADE$  為正三角形，其中  $\overline{BD} < \overline{BE}$ ，則  $\cos \angle CAD = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$

F. 從 1 至 60 的自然數中，任取相異兩數使得其和為偶數且差為 3 的倍數，則有多少種取法？

①⑨②⑩②⑪

G. 試求滿足不等式  $x^2(2x-5)(2x-11) < 5(4x-1)(2x-5)(2x-11)$  的所有整數解  $x$  之和為 ②②②③②④

—————以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷—————

第貳部分：非選擇題(佔 24 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2)、...)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、設有甲、乙丙支瓶子，開始時，甲瓶裝有濃度 27% 的食鹽水  $a$  公升，乙瓶裝有  $b$  公升的純水。每一次操作都是先將甲瓶的溶液倒出  $\frac{1}{3}$  到乙瓶，然後再將乙瓶的溶液倒出  $\frac{1}{3}$  回甲瓶(假設混合後體積沒有變

化)。設  $n$  次操作後，甲瓶有  $a_n$  公升的溶液，乙瓶有  $b_n$  公升的溶液。已知二階方陣  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  滿足

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}。$$

(1) 求二階方陣  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。(4 分)

(2) 當  $a=3$ 、 $b=2$  時，求  $a_{2011}$  及  $b_{2011}$ 。(4 分)

(3) 當  $a=3$ 、 $b=2$  時，在第二輪操作後，乙瓶是濃度為百分之多少的食鹽水？(4 分)

二、秦山加工廠生產甲、乙兩款玩具，甲玩具需使用木板 5 塊、鐵片 5 個、螺絲 1 個；乙玩具需使用木板 5 塊、鐵片 3 個、螺絲 3 個；但庫存只有 40 塊木板、30 個鐵片、20 個螺絲；甲玩具一個利潤 1200 元、乙玩具一個利潤 1000 元，請問：

- (1) 請列出不等式(2 分)，並畫出線性規劃圖形(2 分)。
- (2) 甲、乙兩種玩具各生產幾個？能有最大利潤(4 分)。
- (3) 最大利潤多少？(4 分)