臺北區公立高中九十九學年度第二學期指定科目第二次聯合模擬考試
數學甲考科解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	5	4	135	24	245	1	1	5	3	2	5
14	15	16	17	18								
6	5	5	2	1								

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\log_9 x\cdot\log_4 9=(\log_9 4+\log_4 9)^2-(\dfrac{\log_9 4}{\log_4 9}+\dfrac{\log_4 9}{\log_9 4})$

$\Rightarrow \log_9 x\cdot\log_4 9$

$=(\log_9 4)^2+(\log_4 9)^2+2-\dfrac{(\log_9 4)^2+(\log_4 9)^2}{\log_4 9\cdot\log_9 4}$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{\log 9}\cdot\dfrac{\log 9}{\log 4}=2\Rightarrow \log x=2\log 4=\log 16\Rightarrow x=16$

2. S_1 的圓心爲 $O_1(0,0,0)$ ，半徑爲 $r_1=\sqrt{3}$

S_2 的圓心爲 $O_2(3,4,5)$ ，半徑爲 $r_2=2\sqrt{3}$

① 平面 E ： $x+y+z=k$ 介於此兩球面之間

$\Rightarrow O_1$ 、 O_2 在平面 E 的兩側

$\Rightarrow k(k-12)<0\Rightarrow 0<k<12$

② 平面 E 與 S_1 不相交 $\Rightarrow d(O_1,E)=\dfrac{|k|}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}$

$\Rightarrow k>3$ 或 $k<-3$

③ 平面 E 與 S_2 不相交 $\Rightarrow d(O_2,E)=\dfrac{|12-k|}{\sqrt{3}}>2\sqrt{3}$

$\Rightarrow |k-12|>6\Rightarrow k>18$ 或 $k<6$

由①、②、③可知： $3<k<6$ ，故 $a+b=9$

3. 設正立方體邊長爲 $2x$，則正立方體的體積爲 $8x^3$

正八面體的體積爲 $\dfrac{1}{3}(2x^2\cdot x)\cdot 2=8\Rightarrow x^3=6$

故正立方體的體積爲 48

4. 令 S 表樣本空間，A 表甲、乙、丙三人至少有兩人在同一組的事件，則 $n(S)=C_3^9C_3^6C_3^3\dfrac{1}{3!}$ ，$n(A')=C_2^6C_2^4C_2^2$

$P(A)=1-\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{C_3^9C_3^6C_3^3\frac{1}{3!}}=\dfrac{41}{56}$

二、多選題

5. (1) $f'(x)$ 之次數爲奇數，故存在實數 α 使得 $(x-\alpha)$ 爲 $f'(x)$ 之因式，故 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 有極值

(2) $y=1$ 爲其水平切線

(3) 略

(4) $f(x)=x^4$ 在 $x=0$ 有極小值，但 $f'(0)=f''(0)=0$

(5) 考慮 $h(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ ，故可令 $h(x)=k$ ，即 $f(x)=g(x)+k$ ；

又 $f(1)=g(1)+k$ ，得 $k=0$

6. (1) 一局後，乙袋爲白球的機率爲 $\dfrac{1}{3}\times 1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

(2)(3) 考慮乙袋的球色，白球稱狀態 1，紅球稱狀態 2，則轉移矩陣爲 $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ ，計算二局後，乙袋分別爲白、紅球的機率： $A^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{9}\\\frac{4}{9}\end{bmatrix}$ ，

故乙袋爲紅球的機率應爲 $\dfrac{4}{9}$ 。

設穩定態爲 $x=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ，解 $Ax=x$ 得 $x=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 。

(4)(5) 同上可得轉移矩陣爲 $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ，二局後，乙袋爲紅球的機率應爲 $\dfrac{1}{2}$ ，穩定態仍爲 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

7. $8^nx^2-2^{2n}x-2^nx+1=0\Rightarrow(2^nx-1)(2^{2n}x-1)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{2^n}$ ， $x=\dfrac{1}{2^{2n}}$ ，故 $\alpha_n=\dfrac{1}{2^n}$ 、 $\beta_n=\dfrac{1}{2^{2n}}$

(1) $\alpha_n=\dfrac{1}{2^n}>\alpha_{n+1}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$

(2) $\beta_n=\dfrac{1}{2^{2n}}>0$ 對所有 n 皆成立

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{2n}})=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{2n}})=0$

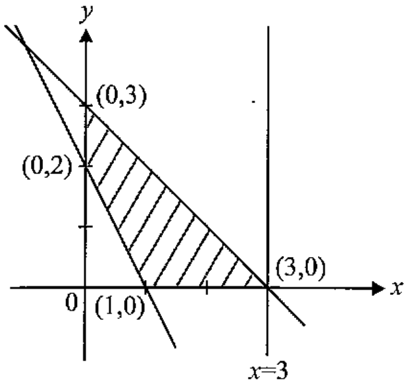
(5) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_n-\beta_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{2n}})$

$=[1-(\dfrac{1}{2})^n]-\dfrac{1}{3}[1-(\dfrac{1}{4})^n]$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{[1-(\dfrac{1}{2})^n]-\dfrac{1}{3}[1-(\dfrac{1}{4})^n]\}=\dfrac{2}{3}$

三、選填題

A. $0\le x\le 3$，$y\ge 0$，$x+y-3\le 0$，$2x+y-2\ge 0$ 的解圖形如下圖

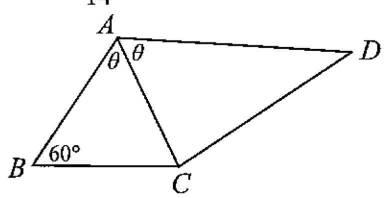


解區域的頂點分別爲(1,0)(3,0)(0,3)(0,2)

(x,y)	$(1,0)$	$(3,0)$	$(0,3)$	$(0,2)$
$2x-3y+2$	4	8	-7	-4

最大値 $M=8$，最小値 $m=-7\Rightarrow M+m=1$

B. $\sin\theta=\dfrac{5}{14}\sqrt{3}\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{11}{14}$



$\sin\angle ACB=\sin(180^\circ-60^\circ-\theta)=\sin(120^\circ-\theta)$

$=\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}-(-\dfrac{1}{2})\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

ΔABC 中，利用正弦定理

$\dfrac{8}{\sin\angle ACB}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\overline{AC}=7$

$\therefore\Delta ADC$面積 $=\dfrac{1}{2}\times7\times12\times\dfrac{5}{14}\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

C. 將 z 化成極式，$z=\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}i=\cos\theta+i\sin\theta$

此時 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{5}$

$z_1=2z^2=2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

$z_2=4z^4=4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

將 z_1，z_2 畫在複數平面上，

$|z_1-z_2|$ 的幾何意義爲 z_1 到 z_2 的距離

利用餘弦定理 $|z_1-z_2|^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{52}{5}$

$\Rightarrow|z_1-z_2|=\dfrac{2}{5}\sqrt{65}$

D. 法 1：

左右手皆爲人頭的情形有三：

(1) 右手爲 2 面皆爲人頭硬幣，左手爲一面人頭一面字的硬幣，機率爲 $(\dfrac{1}{7}\times1)\times(\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{84}$

(2) 右手爲一面人頭一面字的硬幣，左手爲 2 面皆爲人頭硬幣，機率爲 $(\dfrac{5}{7}\times\dfrac{1}{2})\times(\dfrac{1}{6}\times1)=\dfrac{5}{84}$

(3) 左、右手皆爲一面人頭，一面字的硬幣，機率爲 $(\dfrac{5}{7}\times\dfrac{1}{2})\times(\dfrac{4}{6}\times\dfrac{1}{2})=\dfrac{10}{84}$

$\therefore$機率爲 $\dfrac{5}{84}+\dfrac{5}{84}+\dfrac{10}{84}=\dfrac{20}{84}=\dfrac{5}{21}$

法 2：

樣本空間樣本數爲 $14\times12=168$，事件樣本數爲 $2\times5+5\times6=40$

所以機率爲 $\dfrac{40}{168}=\dfrac{5}{21}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) 側面之寬爲 x 公寸，長爲 $108-4x$ 公寸

則體積 $V=(108-4x)\cdot x^2=-4x^3+108x^2$ (3%)

(2) $V'=-12x^2+216x=-12x\cdot(x-3\sqrt{2})\cdot(x+3\sqrt{2})$ (2%)

可知當 $x=3\sqrt{2}$ 時，體積 $V(x)$ 有最大値 $216\cdot(9-\sqrt{2})$ 立方公寸(3%)

二、(1) $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ (2%)

(2) 解 $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (4%)

(3) $A'\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A'\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，

故 $A'\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$ (2%)解得

$$A'=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}$$

(4%)