

臺北區公立高中九十九學年度第二學期 指定科目第二次聯合模擬考試

數學甲

— 作答注意事項 —

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」並標明題號。請在規定之欄位以筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：單選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 - , 士以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子；多選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 - , 士以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3(2)5(3)7(4)9(5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	士
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 1 與 3 劃記，如：

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	士
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(二) 選填題的題號是 A, B, C……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 - 與第 21 列的 7 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	士
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	士
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 80 分)

一、單選題(24 分)

說明：第 1 至 4 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。
每題答對得 6 分，答錯不倒扣。

1. 若 $\log_9 x \cdot \log_4 9 = (\log_9 4 + \log_4 9)^2 - \left(\frac{\log_9 4}{\log_4 9} + \frac{\log_4 9}{\log_9 4}\right)$ ，則 $x =$

- (1) 4
- (2) 16
- (3) 81
- (4) 243
- (5) 256

2. 空間中有兩球面 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 與 $S_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 12$ ，已知有一平面

$E : x + y + z = k$ 介於此兩球面之間，若實數 k 的範圍為 $a < k < b$ ，則 $a + b =$

- (1) 21
- (2) 15
- (3) 9
- (4) 6
- (5) 3

3. 以正立方體各面之中心點為頂點所成之圖形為正八面體，已知此正八面體的體積為 8，則此正立方體的體積為

- (1) 24
- (2) 18
- (3) 64
- (4) 36
- (5) 48

4. 將甲、乙、丙……等 9 人分成三組，則甲、乙、丙三人至少有 2 人在同一組的機率為

- (1) $\frac{3}{56}$
- (2) $\frac{15}{56}$
- (3) $\frac{25}{56}$
- (4) $\frac{41}{56}$
- (5) $\frac{27}{56}$

二、多選題(24分)

說明：第5至7題為多選題，每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的，請選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，所有選項均答對者，該題得8分。若答錯 k 個選項，可得 $\frac{5-2k}{5}$ 題分。例如答錯1個選項者，得該題 $\frac{3}{5}$ 題分；答錯兩個選項者，得該題 $\frac{1}{5}$ 題分，以此類推；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

5. 已知 $f(x)$ 為定義於實數之實係數多項式， $g(x)$ 為定義於實數之可微分函數。試問下列敘述何者為真？
- (1) 若 $f(x)$ 之次數為偶數，則 $f(x)$ 必有極值
 - (2) 若 $f(x) = x^3 + 1$ ，則 $y = f(x)$ 之圖形無水平切線
 - (3) 當 $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) \neq 0$ 時，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處有極值
 - (4) 當 $f(x)$ 在 $x = a$ 處有極值時， $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) \neq 0$
 - (5) 若滿足 $g(1) = f(1)$ 且 $g'(x) = f'(x)$ ，則 $g(x) = f(x)$
6. 設甲袋中有1個白球和2個紅球，乙袋中有1個白球，”先自甲袋中任取一球放入乙袋，再自乙袋中任取一球放入甲袋，如此稱為一局”，試問下列選項何者錯誤？
- (1) 一局後，乙袋為白球的機率為 $\frac{2}{3}$
 - (2) 二局後，乙袋為紅球的機率為 $\frac{5}{9}$
 - (3) 若重複取球多次後，乙袋為紅球或白球的狀態會趨於穩定，則乙袋為紅球與乙袋為白球的機率均等
 - (4) 若更改規則為“先自乙袋中任取一球放入甲袋，再自甲袋中任取一球放入乙袋，如此稱為一局”，則二局後，乙袋為紅球的機率為 $\frac{4}{9}$
 - (5) 若更改規則為“先自乙袋中任取一球放入甲袋，再自甲袋中任取一球放入乙袋，如此稱為一局”，則重複取球多次後，乙袋為紅球和白球的機率仍均等

7. 設 n 為正整數，方程式 $8^n x^2 - 2^{2n} x - 2^n x + 1 = 0$ 的兩根為 α_n 與 β_n ，且 $\alpha_n > \beta_n$ 。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ 對所有 n 皆成立

(2) $\beta_n > 0$ 對所有 n 皆成立

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0$

(5) 若 $S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$

三、選填題(32分)

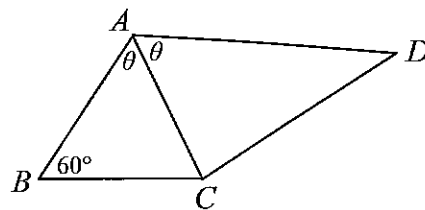
說明：A 至 D 各題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(8~18內)。
每一題完全答對得8分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設 x, y 滿足 $0 \leq x \leq 3$ ， $y \geq 0$ ， $x + y - 3 \leq 0$ ， $2x + y - 2 \geq 0$ 。若 $2x - 3y + 2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m = \underline{\textcircled{3}}$ 。

B. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle BAC = \angle DAC = \theta$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 且

$$\sin \theta = \frac{5}{14} \sqrt{3}, \angle ABC = 60^\circ, \overline{AD} = 12, \overline{AB} = 8, \text{求 } \triangle ADC \text{ 面}$$

積 ⑨⑩ $\sqrt{\text{⑪}}$ 。



C. 已知複數 $z = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i$ ，若 $z_1 = 2z^2$ ， $z_2 = 4z^4$ ，求 $|z_1 - z_2| = \frac{\text{⑫}}{\text{⑬}} \sqrt{\text{⑭⑮}}$ 。

D. 黑箱中有 7 枚均勻的硬幣，其中 1 枚兩面皆是人頭，1 枚兩面皆是字，其餘 5 枚一面是人頭一面是字。將兩手同時伸入箱中分別握住 1 枚硬幣，取出後先打開右手，發現該枚硬幣朝上的一面是人頭，則左手攤開後該枚硬幣朝上的一面也是人頭的機率是 $\frac{\text{⑯}}{\text{⑰⑱}}$ 。

----- 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 -----

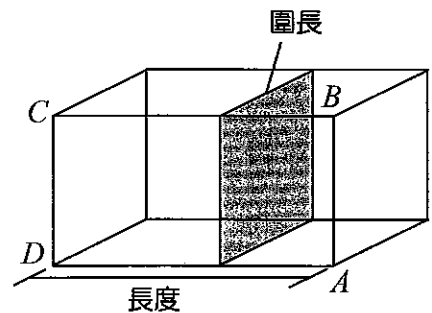
第貳部分：非選擇題(佔 20 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2)、⋯)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、某貨運公司托運個人物件的規定如下：物件必須為長方體且物件

圍長(如右圖灰色正方形之周長)及長度之和需等於 108 公寸。

- (1) 令側面 $ABCD$ 之寬為 x 公寸，試以 x 表示托運物件的體積 V (立方公寸)。(3 分)
- (2) 試問可托運物件之最大體積為何？(5 分)



二、小高與小中兩人欲傳遞信號，但為了怕別人知道，事先約定加密方式如下：如明碼(原始的數字資料)

有兩碼 12，先寫成 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。並先約定好加密矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ，將矩陣 X 左乘二階方陣 A 得到

矩陣 B ，即 $AX = B$ ，再將矩陣 $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，寫成二位數密碼 ab 形式傳給對方。

- (1) 小華欲將明碼 10 加密，請問加密後得到的密碼為何？(2 分)
- (2) 今小明收到小華傳來的密碼 11，試問明碼為何？(4 分)
- (3) 若現在採用新的加密矩陣 A' ，已知 73 加密後得到 21，94 加密後得到 15，請問加密矩陣 A' 為何？(6 分)